

Chapitre 4 : Espaces vectoriels

Les espaces vectoriels constituent l'un des concepts fondamentaux de l'algèbre linéaire. Ils généralisent les notions de vecteurs du plan et de l'espace que nous avons étudiées précédemment, et permettent d'unifier le traitement de nombreux objets mathématiques (vecteurs, matrices, polynômes, fonctions...) sous un même formalisme.

4.1 Espaces vectoriels, sous-espaces vectoriels

4.1.1 Espaces vectoriels et propriétés

Notation. Soit E et F deux ensembles. On note $E \times F$ le produit cartésien de E et F :

$$E \times F = \{(x, y) \mid x \in E, y \in F\}.$$

Donc, si V est un ensemble, $V \times V$ est l'ensemble de tous les couples d'éléments de V et $\mathbb{R} \times V$ est l'ensemble des couples (λ, v) où λ est réel, et v est un élément de V .

Définition 4.1

Soit V un ensemble non vide sur lequel sont définies deux opérations appelées *addition* et *multiplication par un scalaire* :

$$\begin{array}{lcl} + : V \times V & \longrightarrow & V & \text{et} & \cdot : \mathbb{R} \times V & \longrightarrow & V \\ (u, v) & \longmapsto & u + v & & (\lambda, v) & \longmapsto & \lambda v \end{array}$$

On dit que V est un espace vectoriel si les dix axiomes suivants sont satisfaits :

1. La somme de u et v , notée $u + v$, est un élément de V .
2. L'addition est commutative : $u + v = v + u$, pour tout $u, v \in V$.
3. L'addition est associative : $(u + v) + w = u + (v + w)$, pour tout $u, v, w \in V$.
4. Il existe un élément $0_V \in V$, appelé *vecteur zéro*, tel que $v + 0_V = v$, pour tout $v \in V$.
5. Pour chaque $v \in V$ il existe un élément $-v \in V$ tel que $v + (-v) = 0_V$.
6. Le multiple scalaire de v par $\lambda \in \mathbb{R}$, noté λv , est un élément de V .
7. Si $u, v \in V$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ alors $\lambda(u + v) = \lambda u + \lambda v$.
8. Si $v \in V$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ alors $(\lambda + \mu)v = \lambda v + \mu v$.
9. Si $v \in V$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ alors $(\lambda\mu)v = \lambda(\mu v)$.
10. Si $v \in V$ alors $1v = v$.

Les éléments d'un espace vectoriel sont appelés vecteurs.

Remarques 4.4.0.2. 1. A l'aide de ces axiomes, nous pouvons montrer que le vecteur 0_V de l'axiome 4 est unique. En effet, supposons que w est un vecteur de V qui satisfait $v + w = v$ pour tout $v \in V$. Comme cette propriété est valable pour $v = 0_V$, nous avons $0_V + w = 0_V$.

L'axiome 2 nous donne alors $w + 0_V = 0_V$. Comme l'axiome 4 nous donne aussi $w + 0_V = w$, nous avons bien $w = 0_V$.

2. De manière analogue nous pouvons montrer que pour chaque choix de v , le vecteur $-v$ de l'axiome 5 est unique. Il est appelé opposé de v .
3. Un ensemble muni des opérations d'addition et de multiplication par un scalaire est un espace vectoriel si et seulement s'il vérifie tous les dix axiomes. Si un ensemble muni des opérations d'addition et de multiplication par un scalaire ne satisfait pas au moins un des axiomes, alors l'ensemble n'est pas un espace vectoriel (voir exemple 7 plus bas).

Exemples

1. Le plan \mathbb{R}^2 formé des vecteurs

$$\vec{v} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \quad \text{avec } x, y \in \mathbb{R},$$

muni des opérations usuelles :

addition : si $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^2$, alors

$$\vec{u} + \vec{v} = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

multiplication par un scalaire : si $\vec{v} \in \mathbb{R}^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors

$$\lambda \vec{v} = \lambda \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda x \\ \lambda y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

est un espace vectoriel.

Vecteur zéro : $0_{\mathbb{R}^2} = \vec{0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

2. L'ensemble \mathbb{R}^n des n -tuples

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad \text{avec } x_j \in \mathbb{R} \text{ pour } j = 1, 2, \dots, n,$$

muni des opérations suivantes :

addition : si $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$, alors

$$\vec{x} + \vec{y} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

multiplication par un scalaire : si $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors

$$\lambda \vec{x} = \lambda \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda x_1 \\ \vdots \\ \lambda x_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

est un espace vectoriel.

$$\text{Vecteur zéro : } 0_{\mathbb{R}^n} = \vec{0} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Notation. \mathbb{R}^n tel qu'étudié aux chapitres précédents est donc un espace vectoriel, et ses éléments sont donc des vecteurs au sens défini ci-dessus. Mais les exemples suivants montrent d'autres types d'espaces vectoriels. Nous garderons la notation avec une flèche, \vec{v} , lorsqu'il s'agira d'éléments de \mathbb{R}^n , mais nous noterons sans flèche, $v \in V$ pour V un espace vectoriel quelconque.

3. L'ensemble $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ des matrices de taille $m \times n$ à coefficients réels muni des opérations suivantes

addition : si $A, B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, alors

$$\begin{aligned} A + B &= \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & \cdots & a_{1n} + b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & \cdots & a_{mn} + b_{mn} \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R}) \end{aligned}$$

multiplication par un scalaire : si $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors

$$\lambda A = \lambda \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda a_{11} & \cdots & \lambda a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda a_{m1} & \cdots & \lambda a_{mn} \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$$

est un espace vectoriel.

$$\text{Vecteur zéro : } 0_{\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})} = 0_{m \times n} = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

Remarque importante 4.3

On dit bien que l'ensemble des matrices muni de l'addition et de la multiplication scalaire, est un espace vectoriel. Donc ses éléments (les matrices) sont, dans ce contexte, des vecteurs. On voit donc là un premier exemple de cas où la notion de vecteur prend un sens plus abstrait, moins direct, que l'interprétation géométrique habituelle, avec des flèches issues de l'origine, dans un repère.

Les exemples suivants vont dans ce sens.

4. L'ensemble \mathbb{P}_n des polynômes de degré inférieur ou égal à n :

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0,$$

avec $a_j \in \mathbb{R}$ pour $j = 0, 1, 2, \dots, n$, muni des opérations suivantes :

addition : si $p(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$ et $q(x) = b_n x^n + \dots + b_1 x + b_0$, alors

$$\begin{aligned} (p+q)(x) &= p(x) + q(x) = (a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0) + (b_n x^n + \dots + b_1 x + b_0) \\ &= (a_n + b_n) x^n + \dots + (a_1 + b_1) x + (a_0 + b_0) \in \mathbb{P}_n. \end{aligned}$$

multiplication par un scalaire : si $p(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors

$$\begin{aligned} (\lambda p)(x) &= \lambda p(x) = \lambda(a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0) \\ &= (\lambda a_n) x^n + \dots + (\lambda a_1) x + (\lambda a_0) \in \mathbb{P}_n. \end{aligned}$$

est un espace vectoriel.

Vecteur zéro : $p(x) = 0$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.

5. L'ensemble $F(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ des fonctions réelles d'une variable réelle muni des opérations suivantes

addition : si $f, g \in F(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, alors

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x), \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}$$

multiplication par un scalaire : si $f \in F(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors

$$(\lambda f)(x) = \lambda f(x), \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}$$

est un espace vectoriel.

Vecteur zéro : $f(x) = 0$, pour tout $x \in \mathbb{R}$

6. L'ensemble $V = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$ des nombres réels positifs muni des opérations suivantes

addition : si $x, y \in V$, alors

$$x \oplus y = xy$$

multiplication par un scalaire : si $x \in V$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors

$$\lambda \odot x = x^\lambda$$

est un espace vectoriel. Pour le voir, nous devons vérifier que V satisfait les dix axiomes :

(a) Si $x, y \in V$, alors $x > 0$, $y > 0$ et $x \oplus y = xy > 0$. Par conséquent, $x \oplus y \in V$.

(b) L'addition est commutative :

$$x \oplus y = xy = yx = y \oplus x, \quad \text{pour tout } x, y \in V.$$

(c) L'addition est associative :

$$(x \oplus y) \oplus z = (xy) \oplus z = (xy)z = x(yz) = x \oplus (yz) = x \oplus (y \oplus z), \quad \text{pour tout } x, y, z \in V.$$

(d) Le vecteur zéro est le nombre réel 1 car

$$x \oplus 1 = x \cdot 1 = x, \quad \text{pour tout } x \in V.$$

(e) L'opposé de x est $\frac{1}{x}$ car

$$x \oplus \frac{1}{x} = x \cdot \frac{1}{x} = 1, \quad \text{pour tout } x \in V.$$

(f) Si $x \in V$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ alors $x > 0$ et $\lambda \odot x = x^\lambda > 0$. Par conséquent, $\lambda \odot x \in V$.

(g) Si $x, y \in V$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ alors

$$\lambda \odot (x \oplus y) = \lambda \odot (xy) = (xy)^\lambda = x^\lambda y^\lambda = (x^\lambda) \oplus (y^\lambda) = (\lambda \odot x) \oplus (\lambda \odot y).$$

(h) Si $x \in V$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ alors

$$(\lambda + \mu) \odot x = x^{\lambda + \mu} = x^\lambda x^\mu = (x^\lambda) \oplus (x^\mu) = (\lambda \odot x) \oplus (\mu \odot x).$$

(i) Si $x \in V$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ alors

$$(\lambda\mu) \odot x = x^{\lambda\mu} = (x^\mu)^\lambda = \lambda \odot (x^\mu) = \lambda \odot (\mu \odot x).$$

(j) Si $x \in V$ alors $1 \odot x = x^1 = x$, pour tout $x \in V$.

7. Le plan \mathbb{R}^2 muni des opérations suivantes :

addition : si $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^2$, alors

$$\vec{x} + \vec{y} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

multiplication par un scalaire : si $\vec{x} \in \mathbb{R}^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors

$$\lambda \vec{x} = \lambda \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda x_1 \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

n'est pas un espace vectoriel. En effet, malgré le fait que les axiomes 1-9 sont satisfaits avec cette multiplication par un scalaire modifiée, l'axiome 10 ne l'est pas :

$$\text{si } \vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \text{ avec } x_2 \neq 0, \text{ alors } 1 \vec{x} = \begin{bmatrix} 1x_1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ 0 \end{bmatrix} \neq \vec{x}.$$

Remarque importante 4.4

Remarquons qu'un ensemble n'est pas en soi un espace vectoriel. Les opérations dont il est muni sont cruciales. Cela étant dit, quand on mentionnera l'espace vectoriel \mathbb{R}^n , dans le reste de ce cours, cela fera implicitement référence à celui de l'exemple 2.

Propriété 4.5

Simplification de l'addition

Soit V un espace vectoriel. Soit $u, v, w \in V$.

1. Si $u + w = v + w$ alors $u = v$ (simplification à droite).
2. Si $w + u = w + v$ alors $u = v$ (simplification à gauche).

Démonstration. 1. Nous avons

$$\begin{aligned} u + w &= v + w \\ \Rightarrow (u + w) + (-w) &= (v + w) + (-w) \\ \Rightarrow u + [w + (-w)] &= v + [w + (-w)] \quad \text{par (3)} \\ \Rightarrow u + \vec{0} &= v + \vec{0} \quad \text{par (5)} \\ \Rightarrow u &= v \quad \text{par (4)} \end{aligned}$$

2. Comme l'axiome (2) nous donne

$$w + u = u + w \quad \text{et} \quad w + v = v + w,$$

nous avons le résultat en utilisant la partie a). □

Propriété 4.6

Soit V un espace vectoriel. Si $v \in V$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors

1. $0 \cdot v = 0_V$
2. $\lambda \cdot 0_V = 0_V$
3. $(-1) \cdot v = -v$

Démonstration. 1. Nous avons

$$\begin{aligned} 0v + 0v &= (0 + 0)v \quad \text{par (8)} \\ \Rightarrow 0v + 0v &= 0v \\ \Rightarrow (0v + 0v) + (-0v) &= 0v + (-0v) \\ \Rightarrow 0v + (0v + (-0v)) &= 0v + (-0v) \quad \text{par (3)} \\ \Rightarrow 0v + 0_V &= 0_V \quad \text{par (5)} \\ \Rightarrow 0v &= 0_V \quad \text{par (4)} \end{aligned}$$

2. Nous avons

$$\begin{aligned} \lambda 0_V + \lambda 0_V &= \lambda(0_V + 0_V) \quad \text{par (7)} \\ \Rightarrow \lambda 0_V + \lambda 0_V &= \lambda 0_V \quad \text{par (4)} \\ \Rightarrow (\lambda 0_V + \lambda 0_V) + (-\lambda 0_V) &= \lambda 0_V + (-\lambda 0_V) \\ \Rightarrow \lambda 0_V + (\lambda 0_V + (-\lambda 0_V)) &= \lambda 0_V + (-\lambda 0_V) \quad \text{par (3)} \\ \Rightarrow \lambda 0_V + 0_V &= 0_V \quad \text{par (5)} \\ \Rightarrow \lambda 0_V &= 0_V \quad \text{par (4)} \end{aligned}$$

3. Nous devons montrer que $v + (-1)v = 0_V$ pour tout $v \in V$:

$$\begin{aligned} v + (-1)v &= 1v + (-1)v \quad \text{par (10)} \\ \Rightarrow v + (-1)v &= (1 + (-1))v \quad \text{par (8)} \\ \Rightarrow v + (-1)v &= 0v \\ \Rightarrow v + (-1)v &= 0_V \quad \text{par la partie a).} \end{aligned}$$

□

Remarques 4.4.0.7. Dans l'espace vectoriel de l'exemple 6,

- la propriété $0v = 0_V$ s'écrit $x^0 = 1$
- la propriété $\lambda 0_V = 0_V$ s'écrit $1^\lambda = 1$
- la propriété $(-1)v = -v$ s'écrit $x^{-1} = \frac{1}{x}$

Définition 4.8

Combinaison linéaire

Soit V un espace vectoriel. $v \in V$ est une *combinaison linéaire* des vecteurs v_1, v_2, \dots, v_n de V s'il peut s'écrire sous la forme

$$v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_n v_n, \quad \text{avec } \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}.$$

Les nombres $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ sont appelés *coefficients* (ou *poïds*) de la combinaison linéaire.

Exemples. 1. Soit $V = \mathbb{R}^3$, $\vec{v} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}$, $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ et $\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$. Comme

$$3\vec{v}_1 + 2\vec{v}_2 = 3 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix} = \vec{v},$$

le vecteur \vec{v} est combinaison linéaire de \vec{v}_1 et \vec{v}_2 avec coefficients respectifs $\lambda_1 = 3$ et $\lambda_2 = 2$.

2. Soit $V = \mathbb{P}_2$ et Soit $p_1(x) = 2x^2 + 3$, $p_2(x) = x^2 - x$. Comme

$$4p_1(x) + (-8)p_2(x) = 4(2x^2 + 3) + (-8)(x^2 - x) = 8x + 12,$$

le polynôme $p(x) = 8x + 12$ est combinaison linéaire de p_1 et p_2 avec coefficients respectifs $\lambda_1 = 4$ et $\lambda_2 = -8$.

4.1.2 Sous-espaces vectoriels

Définition 4.9

Sous-espaces vectoriels

Soit V un espace vectoriel et soit $W \subset V$ un sous-ensemble de V .

On dit que W est un *sous-espace vectoriel* de V si les conditions suivantes sont satisfaites :

1. $0_V \in W$.
2. Si $w_1, w_2 \in W$ alors $w_1 + w_2 \in W$ (stabilité par addition).
3. Si $w \in W$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ alors $\lambda w \in W$ (stabilité par multiplication scalaire).

En d'autres termes, $W \subset V$ est un sous-espace vectoriel de V s'il est non-vide et si toute combinaison linéaire d'éléments de W est un élément de W .

Remarque importante 4.10

Si W est un sous-espace vectoriel de V , alors W est un espace vectoriel muni des opérations induites par V (vérifier que les 10 axiomes sont satisfaits pour W).
Donc, pour montrer qu'un ensemble non-vidé est un espace vectoriel, il suffit de montrer qu'il est un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel connu, ce qui est souvent plus rapide, puisqu'il n'y a que trois axiomes à vérifier.

Remarques 4.4.0.11. 1. On a l'inclusion $W \subset V$. Or si W est un espace vectoriel, W vérifie les dix axiomes de la définition 4.1, et par conséquent W vérifie aussi les trois axiomes de la définition 4.9. Donc W est un sous-espace vectoriel de V . C'est le plus grand sous-espace vectoriel de V .

2. $\{0_V\} \subset W$ est un sous-espace vectoriel de W . En effet, nous avons

- (a) $0_V \in \{0_V\}$,
- (b) $0_V + 0_V = 0_V \in \{0_V\}$,
- (c) $\lambda 0_V = 0_V \in \{0_V\}$.

C'est le plus petit sous-espace vectoriel de W , puisque tous les sous-espaces vectoriels de W contiennent 0_V .

Exemples

1. L'ensemble $W = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid x + y = 0 \right\}$ est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^2 .

En effet, le vecteur $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ est dans W et comme les éléments de W sont de la forme $\begin{bmatrix} x \\ -x \end{bmatrix}$,

avec $x \in \mathbb{R}$, nous avons :

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ -x_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_2 \\ -x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ -(x_1 + x_2) \end{bmatrix} \in W,$$

$$\lambda \begin{bmatrix} x \\ -x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda x \\ -\lambda x \end{bmatrix} \in W.$$

$W \subset \mathbb{R}^2$ est la droite de pente -1 qui passe par l'origine.

2. L'ensemble $U = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 : x + y = 2 \right\}$ n'est pas un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^2 . En effet,

il suffit de constater que $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \notin U$.

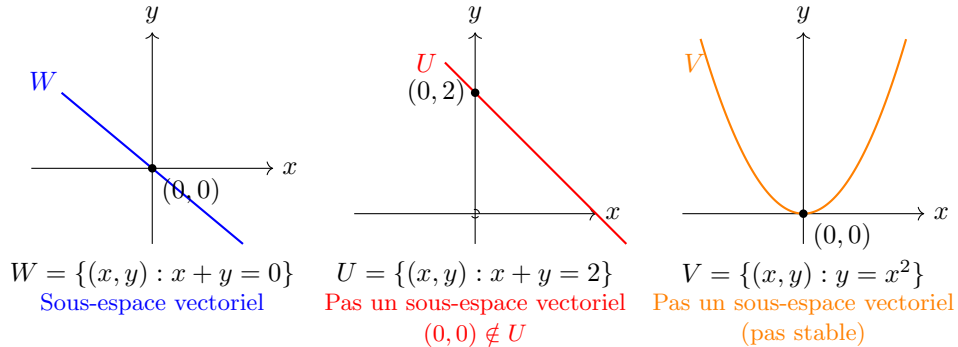
$U \subset \mathbb{R}^2$ est la droite de pente -1 qui passe par $(0, 2)$.

3. L'ensemble $V = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 : y = x^2 \right\}$ n'est pas un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^2 même si

$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \in V$. En effet, les éléments de V sont de la forme $\begin{bmatrix} x \\ x^2 \end{bmatrix}$, avec $x \in \mathbb{R}$, et

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_2 \\ x_1^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1^2 + x_2^2 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ (x_1 + x_2)^2 \end{bmatrix} \quad \text{en général, et}$$

$$\lambda \begin{bmatrix} x \\ x^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda x \\ \lambda x^2 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} \lambda x \\ (\lambda x)^2 \end{bmatrix} \quad \text{en général.}$$



$$4. W = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid ax + by + cz = 0, a, b, c \neq 0 \right\} \subset \mathbb{R}^3$$

W est un plan de \mathbb{R}^3 . On montre que W est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^3 .

(a) $\vec{0} \in W : \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \in W$ car $a \cdot 0 + b \cdot 0 + c \cdot 0 = 0$

(b) $\vec{u} + \vec{v} \in W$, pour $\vec{u}, \vec{v} \in W$.

En effet, soit $\vec{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}$, $\vec{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} \in W$, alors

$$au_1 + bu_2 + cu_3 = 0 \quad \text{et} \quad av_1 + bv_2 + cv_3 = 0.$$

On a donc $\vec{u} + \vec{v} \in W$ car :

$$\begin{aligned} a(u_1 + v_1) + b(u_2 + v_2) + c(u_3 + v_3) &= au_1 + av_1 + bu_2 + bv_2 + cu_3 + cv_3 \\ &= \underbrace{au_1 + bu_2 + cu_3}_{=0} + \underbrace{av_1 + bv_2 + cv_3}_{=0} \\ &= 0 + 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

(c) Si $\vec{u} \in W$, $\lambda \vec{u} \in W$. On fait le même raisonnement qu'en 2.

$$5. W = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid ax + by + cz = 1, a, b, c \neq 0 \right\} \text{ n'est pas un sous-espace vectoriel de } \mathbb{R}^3.$$

En effet, on a $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \notin W$ car $a \cdot 0 + b \cdot 0 + c \cdot 0 = 0 \neq 1$.

6. L'ensemble $C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ des fonctions continues est un sous-espace vectoriel de $F(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ car la fonction nulle est continue, la somme de deux fonctions continues est continue et le produit d'une fonction continue par un scalaire reste continue.
7. L'ensemble \mathbb{P}_n est un sous-espace vectoriel de $F(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ pour tout $n = 0, 1, 2, \dots$
8. L'ensemble \mathbb{P}_k est un sous-espace vectoriel de \mathbb{P}_n pour tout $k = 0, 1, 2, \dots, n$.

Remarque importante 4.12

Soit $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_m \in \mathbb{R}^n$, alors $\text{Vect}(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_m)$ est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^n .

En effet :

1. $\vec{0} = 0\vec{v}_1 + \dots + 0\vec{v}_m \in \text{Vect}(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_m)$.
2. Soit $\vec{v}, \vec{w} \in \text{Vect}(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_m)$, alors $\vec{v} = \lambda_1\vec{v}_1 + \dots + \lambda_m\vec{v}_m$ et $\vec{w} = \mu_1\vec{v}_1 + \dots + \mu_m\vec{v}_m$,
donc $\vec{v} + \vec{w} = (\lambda_1 + \mu_1)\vec{v}_1 + \dots + (\lambda_m + \mu_m)\vec{v}_m \in \text{Vect}(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_m)$.
3. $\lambda\vec{v} = \lambda\vec{v}_1 + \dots + \lambda\vec{v}_m \in \text{Vect}(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_m)$.

La notion d'espace engendré se généralise aux espaces vectoriels quelconques.

Sous-espace vectoriel engendré par un ensemble de vecteurs

Définition 4.13

Sous-espace vectoriel engendré

Soit V un espace vectoriel. Soit $v_1, v_2, \dots, v_n \in V$.

L'ensemble formé de toutes les combinaisons linéaires de v_1, v_2, \dots, v_n est un sous-espace vectoriel de V appelé *sous-espace vectoriel engendré par v_1, v_2, \dots, v_n* , noté $\text{Vect}(v_1, \dots, v_n)$. On dit que $\{v_1, \dots, v_n\}$ est un *système générateur* (ou une *famille génératrice*) de $\text{Vect}(v_1, \dots, v_n)$.

Cette définition est en réalité une définition-théorème, puisqu'elle contient l'affirmation :

L'ensemble formé de toutes les combinaisons linéaires de v_1, v_2, \dots, v_n est un sous-espace vectoriel de V .

Vérifions-la dans le cas $n = 2$, la démonstration dans le cas général est similaire.

Soit V un espace vectoriel, $v_1, v_2 \in V$ et

$$W = \{v \in V \mid v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}\}.$$

Alors,

1. $0_V \in V$ est dans W car $0_V = 0v_1 + 0v_2$.
2. Soit $v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2$ et $w = \mu_1 v_1 + \mu_2 v_2$ deux éléments de W . Nous avons :
 $v + w = (\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) + (\mu_1 v_1 + \mu_2 v_2) = (\lambda_1 + \mu_1) v_1 + (\lambda_2 + \mu_2) v_2 \in W$.

$$3. \lambda v = \lambda(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) = (\lambda\lambda_1) v_1 + (\lambda\lambda_2) v_2 \in W.$$

Remarques 4.4.0.14. Si w est une combinaison linéaire de u et v , alors $\text{Vect}(u, v, w) = \text{Vect}(u, v)$.

Exemples. 1. Soit $V = \mathbb{P}_2$. Considérons les polynômes

$$p_1(x) = 1, \quad p_2(x) = x, \quad p_3(x) = x^2, \quad \text{avec } x \in \mathbb{R}.$$

Les éléments de $\text{Vect}(p_1, p_2)$ sont de la forme

$$\lambda_1 p_1(x) + \lambda_2 p_2(x) = \lambda_1 + \lambda_2 x, \quad \text{avec } \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}.$$

Ainsi,

$$\text{Vect}(p_1, p_2) = \mathbb{P}_1.$$

Par conséquent, l'ensemble $\{p_1, p_2\}$ est un système générateur de \mathbb{P}_1 .

D'autre part, comme

$$\lambda_1 p_1(x) + \lambda_2 p_2(x) + \lambda_3 p_3(x) = \lambda_1 + \lambda_2 x + \lambda_3 x^2, \quad \text{avec } \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R},$$

nous avons

$$\text{Vect}(p_1, p_2, p_3) = \mathbb{P}_2.$$

Par conséquent, l'ensemble $\{p_1, p_2, p_3\}$ est un système générateur de \mathbb{P}_2 .

2. Soit $V = \mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{R})$. Considérons les matrices

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Les éléments de $\text{Vect}(A_1, A_2)$ sont de la forme

$$\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 = \lambda_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \text{avec } \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}.$$

Ainsi,

$$\text{Vect}(A_1, A_2) = \left\{ M \in \mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{R}) \mid M = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, a, b \in \mathbb{R} \right\}.$$

Cet ensemble représente toutes les matrices 3×2 dont seule la première ligne est non nulle.

D'autre part, comme

$$\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 + \lambda_3 A_3 + \lambda_4 A_4 = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ \lambda_3 & \lambda_4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \text{avec } \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 \in \mathbb{R},$$

nous avons

$$\text{Vect}(A_1, A_2, A_3, A_4) = \left\{ M \in \mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{R}) \mid M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\}.$$

Par conséquent, l'ensemble $\{A_1, A_2, A_3, A_4\}$ est un système générateur du sous-espace des matrices 3×2 dont la troisième ligne est nulle.

4.1.3 Indépendance linéaire

Définition 4.15

Indépendance linéaire

Soit V un espace vectoriel. Soit v_1, v_2, \dots, v_n des vecteurs de V .

Les vecteurs v_1, v_2, \dots, v_n sont *linéairement indépendants* (ou *libres*) si la seule solution de l'équation

$$x_1v_1 + x_2v_2 + \dots + x_nv_n = 0_V$$

est la solution nulle (ou triviale) :

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 0, \quad \dots, \quad x_n = 0.$$

Si par contre, il existe des coefficients $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ non tous nuls tels que

$$\lambda_1v_1 + \lambda_2v_2 + \dots + \lambda_nv_n = 0_V \quad (\star)$$

on dit que les vecteurs sont *linéairement dépendants* (ou *liés*) et dans ce cas, (\star) est appelée une *relation de dépendance linéaire*.

Remarques 4.4.0.16. *Tout ensemble de vecteurs qui contient le vecteur 0_V est linéairement dépendant car*

$$1 \cdot 0_V + 0v_1 + 0v_2 + \dots + 0v_n = 0_V \quad \text{et} \quad (1, 0, 0, \dots, 0) \neq (0, 0, 0, \dots, 0).$$

Exemples

1. Soit $V = \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$, l'espace vectoriel des matrices 2×2 à coefficients réels.

Les matrices

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

sont linéairement indépendantes. En effet, si

$$\lambda_1A_1 + \lambda_2A_2 + \lambda_3A_3 + \lambda_4A_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

on obtient

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ \lambda_3 & \lambda_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{donc,} \quad \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0.$$

Ainsi, la seule combinaison linéaire nulle est la combinaison triviale.

Par contre, les matrices

$$B_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

sont linéairement dépendantes, car

$$1B_1 + 1B_2 + (-1)B_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

On a donc une relation de dépendance linéaire entre ces trois matrices.

2. Soit $V = \mathbb{P}_2$. Les polynômes

$$p_1(x) = 1, \quad p_2(x) = x, \quad p_3(x) = x^2, \quad \text{avec } x \in \mathbb{R},$$

sont linéairement indépendants. En effet,

$$\begin{aligned} \lambda_1 p_1(x) + \lambda_2 p_2(x) + \lambda_3 p_3(x) = 0 &\iff \lambda_1 1 + \lambda_2 x + \lambda_3 x^2 = 0 \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R} \\ &\iff \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Par contre, les polynômes

$$q_1(x) = x^2 - 2x, \quad q_2(x) = x^2 + 3, \quad q_3(x) = 2x + 3$$

sont linéairement dépendants car

$$1q_1(x) + (-1)q_2(x) + 1q_3(x) = 0.$$

3. Soit $V = F(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Les fonctions

$$f_1(x) = \cos(x) \quad \text{et} \quad f_2(x) = \sin(x)$$

sont linéairement indépendantes. En effet, si

$$\lambda_1 \cos(x) + \lambda_2 \sin(x) = 0 \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R},$$

nous avons en particulier, en prenant $x = 0$ et $x = \frac{\pi}{2}$:

$$\begin{cases} \lambda_1 \cos(0) + \lambda_2 \sin(0) = 0 \\ \lambda_1 \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + \lambda_2 \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} \lambda_1 = 0, \\ \lambda_2 = 0. \end{cases}$$

Par contre, les fonctions

$$g_1(x) = \cos^2(x), \quad g_2(x) = \sin^2(x) \quad \text{et} \quad g_3(x) = \cos(2x)$$

sont linéairement dépendantes car $\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$, donc

$$1g_1(x) + (-1)g_2(x) + (-1)g_3(x) = 0, \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

4. Soit $V = F(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. La formule

$$\cos(3x) = 4 \cos^3(x) - 3 \cos(x)$$

indique que les fonctions

$$f_1(x) = \cos(x), \quad f_2(x) = \cos(3x) \quad \text{et} \quad f_3(x) = \cos^3(x)$$

sont linéairement dépendantes, car

$$3f_1(x) + 1f_2(x) + (-4)f_3(x) = 0, \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}$$

Alternativement, cela peut être montré en résolvant

$$\lambda_1 \cos(x) + \lambda_2 \cos(3x) + \lambda_3 \cos^3(x) = 0 \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

En prenant $x = 0$, $x = \frac{\pi}{6}$ et $x = \frac{\pi}{3}$ nous obtenons le système homogène

$$\begin{cases} \lambda_1 \cos(0) + \lambda_2 \cos(0) + \lambda_3 \cos^3(0) = 0 \\ \lambda_1 \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + \lambda_2 \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + \lambda_3 \cos^3\left(\frac{\pi}{6}\right) = 0 \\ \lambda_1 \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + \lambda_2 \cos(\pi) + \lambda_3 \cos^3\left(\frac{\pi}{3}\right) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ 4\lambda_1 + 3\lambda_3 = 0 \\ 4\lambda_1 - 8\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \end{cases}$$

Comme la solution de ce système est

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad \text{avec } t \in \mathbb{R},$$

nous retrouvons la relation de dépendance linéaire

$$3f_1(x) + 1f_2(x) + (-4)f_3(x) = 0, \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

Théorème 4.17

Caractérisation des ensembles linéairement dépendants

Soit V un espace vectoriel, et $v_1, v_2, \dots, v_k \in V$ (avec $k \geq 2$).

L'ensemble $S = \{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ est linéairement dépendant si et seulement si au moins un des vecteurs de S peut s'écrire comme combinaison linéaire des autres.

Démonstration. Analogue au cas $V = \mathbb{R}^n$ traité au chapitre 1. □

Corollaire 4.18

Si l'ensemble de vecteurs $\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ est linéairement dépendant alors l'ensemble $\{v_1, v_2, \dots, v_k, v\}$ est aussi linéairement dépendant et ceci pour n'importe quel choix de $v \in V$.

Démonstration. Supposons que $v_1 \in \text{Vect}(v_2, \dots, v_k)$. Alors nous avons $v_1 \in \text{Vect}(v_2, \dots, v_k, v)$ pour tout $v \in V$ car

$$v_1 = \mu_2 v_2 + \dots + \mu_k v_k \Rightarrow v_1 = \mu_2 v_2 + \dots + \mu_k v_k + 0v$$

□

Corollaire 4.19

Si $S = \{v_1, \dots, v_k\}$ est un ensemble de vecteurs linéairement indépendants alors tout sous-ensemble T de S est formé de vecteurs linéairement indépendants.

Démonstration. Supposons qu'un sous-ensemble T de S est formé de vecteurs linéairement dépendants. Le corollaire précédent entraîne que l'ensemble S est aussi formé de vecteurs linéairement dépendants, ce qui est en contradiction avec l'hypothèse. \square

4.2 Bases et dimension**Définition 4.20***Base d'un espace vectoriel*

Soit V un espace vectoriel. Soit b_1, b_2, \dots, b_n des vecteurs de V .

L'ensemble de vecteurs $B = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$ est une *base de V* si et seulement si

1. l'ensemble $B = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$ est linéairement indépendant,
2. l'ensemble $B = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$ est un système générateur de V :

$$V = \text{Vect}(B) = \text{Vect}(b_1, b_2, \dots, b_n).$$

On note alors $\mathcal{B} = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ et cette notation tient compte de l'ordre des vecteurs.

Remarques 4.4.0.21. Cette définition ne présuppose pas que tous les espaces vectoriels ont une base $\mathcal{B} = (b_1, b_2, \dots, b_n)$. Nous reviendrons sur ce point lors de la définition 4.25, qui distingue les espaces de dimension finie de ceux de dimension infinie.

Exemples. 1. Soit $V = \mathbb{R}^n$. Les vecteurs

$$\vec{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \dots, \quad \vec{e}_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

sont linéairement indépendants et engendrent $V = \mathbb{R}^n$. Par conséquent, ils forment une base de \mathbb{R}^n , appelée *base canonique*, notée \mathcal{E} :

$$\mathcal{E} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n).$$

2. Soit $A = \begin{bmatrix} \vec{a}_1 & \vec{a}_2 & \cdots & \vec{a}_n \end{bmatrix}$ une matrice carrée de taille $n \times n$.

En vertu du théorème de caractérisation des matrices inversibles, nous avons :

$$(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n) \text{ est une base de } \mathbb{R}^n \iff A \text{ est inversible.}$$

3. Soit $V = \mathbb{P}_2$ l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à 2. Nous avons vu que les polynômes

$$p_1(x) = 1, \quad p_2(x) = x \quad \text{et} \quad p_3(x) = x^2, \quad \text{avec } x \in \mathbb{R},$$

sont linéairement indépendants. De plus, comme tout élément de \mathbb{P}_2 s'écrit

$$p(x) = a + bx + cx^2 = a p_1(x) + b p_2(x) + c p_3(x), \quad \text{avec } a, b, c \in \mathbb{R},$$

les polynômes p_1 , p_2 et p_3 forment un système générateur de \mathbb{P}_2 , donc une base de \mathbb{P}_2 , appelée *base canonique*.

Notation. Nous allons noter cette base $\mathcal{E} = (1, x, x^2)$ plutôt que $\mathcal{E} = (p_1, p_2, p_3)$.

4. Soit $V = \mathbb{P}_n$ l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à n . Comme les polynômes

$$p_1(x) = 1, \quad p_2(x) = x, \quad p_3(x) = x^2, \quad \dots, \quad p_n(x) = x^{n-1}, \quad p_{n+1}(x) = x^n, \quad \text{avec } x \in \mathbb{R},$$

sont linéairement indépendants et tout polynôme s'écrit

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_{n-1} x^{n-1} + a_n x^n, \quad \text{avec } a_0, a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R},$$

l'ensemble $\mathcal{E} = (1, x, x^2, \dots, x^n)$ est une base de \mathbb{P}_n , appelée *base canonique*.

5. Soit $V = \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices de taille 2×2 . Comme les matrices

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

sont linéairement indépendantes et toute matrice de taille 2×2 peut s'écrire sous la forme

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + d \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \text{avec } a, b, c, d \in \mathbb{R},$$

l'ensemble

$$\mathcal{E} = \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right)$$

est une base de $V = \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$, appelée *base canonique*.

6. De même, l'espace vectoriel $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ des matrices de taille $m \times n$ admet comme base canonique l'ensemble des matrices $(E_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$ où E_{ij} désigne la matrice dont tous les coefficients sont nuls sauf celui en position (i, j) qui vaut 1.
7. Soit $V = \mathbb{P}_4$ l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à 4. Considérons les trois polynômes

$$p_1(x) = x^2 + 2x - 1, \quad p_2(x) = 2x^2 - x + 3, \quad p_3(x) = 5x^2 + 3x + 5, \quad \text{avec } x \in \mathbb{R}.$$

et soit $W = \text{Vect}(p_1, p_2, p_3)$.

Comme $p_3(x) = 2p_1(x) + p_2(x)$, ces polynômes sont linéairement dépendants. Donc $\{p_1, p_2, p_3\}$ ne constitue pas une base de W .

Par contre, les polynômes p_1 et p_2 sont linéairement indépendants et $\text{Vect}(p_1, p_2, p_3) = \text{Vect}(p_1, p_2)$, donc $\mathcal{B} = \{p_1, p_2\}$ forme une base de W .

8. Soit $V = \mathbb{P}_3$. Posons

$$q_1(x) = 1, \quad q_2(x) = x + 1, \quad q_3(x) = x^2 + x, \quad q_4(x) = x^3 + x^2.$$

Montrons que $\mathcal{B} = \{q_1, q_2, q_3, q_4\}$ est une base de V .

Indépendance linéaire. Supposons

$$a q_1(x) + b q_2(x) + c q_3(x) + d q_4(x) = 0.$$

En développant et en regroupant par puissances de x :

$$(a + b) + (b + c)x + (c + d)x^2 + dx^3 = 0.$$

Par identification des coefficients, on obtient le système :

$$\begin{cases} d = 0, \\ c + d = 0, \\ b + c = 0, \\ a + b = 0, \end{cases} \Rightarrow a = b = c = d = 0.$$

Ainsi, les polynômes q_1, q_2, q_3, q_4 sont linéairement indépendants.

Génération. Soit $p(x) = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 \in \mathbb{P}_3$. Cherchons $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tels que

$$p(x) = a q_1(x) + b q_2(x) + c q_3(x) + d q_4(x).$$

Comme plus haut, l'égalité des coefficients impose :

$$\begin{cases} d = D, \\ c + d = C, \\ b + c = B, \\ a + b = A, \end{cases} \quad \text{d'où} \quad \begin{cases} d = D, \\ c = C - D, \\ b = B - C + D, \\ a = A - B + C - D. \end{cases}$$

Il existe donc toujours des réels a, b, c, d réalisant $p(x)$.

Donc $\mathcal{B} = (1, x + 1, x^2 + x, x^3 + x^2)$ est une base de \mathbb{P}_3 .

Théorème 4.22

Théorème de la base extraite

Soit V un espace vectoriel. Soit $S = \{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ un ensemble de vecteurs de V et soit $W = \text{Vect}(v_1, v_2, \dots, v_k)$ le sous-espace vectoriel de V engendré par S .

1. Si un vecteur de S est combinaison linéaire des autres, on peut le supprimer sans changer l'espace engendré : les autres vecteurs engendrent encore W .
2. Si $W \neq \{0_V\}$, alors il existe un sous-ensemble de S qui est une base de W . Autrement dit, il est possible d'extraire de l'ensemble S une base de W .

Démonstration. 1. Supposons que v_k s'écrit comme combinaison linéaire de v_1, v_2, \dots, v_{k-1} (si ce n'est pas le cas, il suffit de renuméroter les vecteurs) :

$$v_k = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_{k-1} v_{k-1}$$

Soit maintenant w un vecteur quelconque de W . Comme S engendre W nous avons :

$$\begin{aligned} w &= \mu_1 v_1 + \mu_2 v_2 + \dots + \mu_{k-1} v_{k-1} + \mu_k v_k \\ &= \mu_1 v_1 + \mu_2 v_2 + \dots + \mu_{k-1} v_{k-1} + \mu_k (\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_{k-1} v_{k-1}) \\ &= (\mu_1 + \mu_k \lambda_1) v_1 + (\mu_2 + \mu_k \lambda_2) v_2 + \dots + (\mu_{k-1} + \mu_k \lambda_{k-1}) v_{k-1} \end{aligned}$$

ce qui montre que $\{v_1, v_2, \dots, v_{k-1}\}$ engendre encore W .

2. Si S est linéairement indépendant, alors S est une base. Sinon l'un des vecteurs de S est une combinaison linéaire des autres et d'après le point 1, on peut l'enlever. On continue de la sorte jusqu'à ce que l'ensemble de vecteurs restant soit linéairement indépendant. \square

Théorème 4.23

Soit V un espace vectoriel qui admet $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$ pour base.

Si $m > n$, alors tout ensemble de vecteurs de V formé de m vecteurs est forcément linéairement dépendant.

Démonstration. Soit $\{w_1, \dots, w_m\}$, avec $m > n$, un ensemble de vecteurs de V . Il faut montrer que

$$\lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 + \dots + \lambda_m w_m = 0_V \quad (\star)$$

possède une solution non triviale $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m) \neq (0, 0, \dots, 0)$.

Comme $\mathcal{B} = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ est une base de V , tout vecteur de V peut s'écrire comme une combinaison linéaire de b_1, b_2, \dots, b_n . En particulier

$$\begin{cases} w_1 = a_{11}b_1 + a_{12}b_2 + \dots + a_{1n}b_n \\ w_2 = a_{21}b_1 + a_{22}b_2 + \dots + a_{2n}b_n \\ \vdots \\ w_m = a_{m1}b_1 + a_{m2}b_2 + \dots + a_{mn}b_n \end{cases}$$

En remplaçant dans (\star) nous trouvons :

$$\lambda_1 (a_{11}b_1 + a_{12}b_2 + \dots + a_{1n}b_n) + \dots + \lambda_m (a_{m1}b_1 + a_{m2}b_2 + \dots + a_{mn}b_n) = 0_V$$

ou de manière équivalente

$$(\lambda_1 a_{11} + \lambda_2 a_{21} + \dots + \lambda_m a_{m1}) b_1 + \dots + (\lambda_1 a_{1n} + \lambda_2 a_{2n} + \dots + \lambda_m a_{mn}) b_n = 0_V.$$

Comme $\mathcal{B} = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ est une base de V , les vecteurs b_1, b_2, \dots, b_n sont linéairement indépendants et par conséquent, tous les coefficients de cette équation sont nuls :

$$\underbrace{(\lambda_1 a_{11} + \lambda_2 a_{21} + \dots + \lambda_m a_{m1})}_{=0} b_1 + \dots + \underbrace{(\lambda_1 a_{1n} + \lambda_2 a_{2n} + \dots + \lambda_m a_{mn})}_{=0} b_n = 0_V.$$

Nous trouvons ainsi un système de n équations homogènes à m inconnues $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m)$:

$$\begin{cases} a_{11}\lambda_1 + a_{21}\lambda_2 + \dots + a_{m1}\lambda_m = 0 \\ \vdots \\ a_{1n}\lambda_1 + a_{2n}\lambda_2 + \dots + a_{mn}\lambda_m = 0 \end{cases}$$

Comme par hypothèse $m > n$, le système possède des solutions non triviales, ce qui entraîne la dépendance linéaire des vecteurs w_1, w_2, \dots, w_m . \square

Corollaire 4.24

Soit V un espace vectoriel qui admet comme bases $\mathcal{B} = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ et $\mathcal{C} = (c_1, c_2, \dots, c_m)$. Alors $m = n$.
Autrement dit, toutes les bases d'un espace vectoriel ont le même nombre d'éléments.

Démonstration. Soit (b_1, b_2, \dots, b_n) et (c_1, c_2, \dots, c_m) deux bases de V .

Comme (b_1, \dots, b_n) est une base et par définition les vecteurs w_1, \dots, w_m sont linéairement indépendants, le théorème 4.23 nous donne $m \leq n$.

En échangeant les rôles de (b_1, b_2, \dots, b_n) et (c_1, c_2, \dots, c_m) nous obtenons $n \leq m$.

Par conséquent, $m = n$. \square

Définition 4.25*Dimension d'un espace-vectoriel*

Soit V un espace vectoriel. Alors V est forcément dans l'un des deux cas suivants :

1. V admet une famille génératrice avec un nombre fini d'éléments. Alors V admet des bases, qui ont toutes le même nombre d'éléments. Dans ce cas, la *dimension* de V est le nombre de vecteurs d'une base de V . Elle est notée $\dim V$.
2. Si V n'admet pas de famille finie génératrice, on dira que V est de dimension infinie : $\dim V = \infty$.

Remarque 4.4.0.26. Comme $\{0_V\}$ est un ensemble linéairement dépendant, l'espace vectoriel $\{0_V\}$ ne peut pas avoir de base et nous posons

$$\dim\{0_V\} = 0.$$

Exemples. 1. $\dim(\mathbb{R}^3) = 3$ car $\mathcal{E} = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$ est une base de \mathbb{R}^3 .

2. $\dim(\mathbb{R}^n) = n$ car $\mathcal{E} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n)$ est une base de \mathbb{R}^n .

3. $\dim(\mathbb{P}_2) = 3$ car $\mathcal{E} = (1, x, x^2)$ est une base de \mathbb{P}_2 .

4. $\dim(\mathbb{P}_n) = n + 1$ car $\mathcal{E} = (1, x, x^2, \dots, x^n)$ est une base de \mathbb{P}_n .

5. $\dim(\mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})) = 4$ car

$$\mathcal{E} = \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right)$$

est une base de $\mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$.

6. $\dim(\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})) = mn$.

7. L'ensemble des fonctions et l'ensemble des fonctions continues de \mathbb{R} dans \mathbb{R} sont deux espaces vectoriels de dimension infinie.

Remarque importante 4.27

À de rares exceptions près, ce cours traitera essentiellement d'espaces vectoriels de dimension finie.

Théorème 4.28

Soit V un espace vectoriel de dimension $n > 0$.

1. Tout ensemble de n vecteurs linéairement indépendants engendre V ; c'est donc une base de V .
2. Tout ensemble de n vecteurs qui engendre V est linéairement indépendant ; c'est donc une base de V .

Remarque 4.4.0.29. Si la dimension $n > 0$ de l'espace vectoriel V est connue, pour obtenir une base de V il suffit de trouver :

- soit n vecteurs linéairement indépendants de V ,
- soit un système générateur de V formé de n vecteurs.

Exemple. Montrer que $\mathcal{B} = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right)$ est une base de \mathbb{R}^3 .

Comme $\dim(\mathbb{R}^3) = 3$, il suffit de montrer que les trois vecteurs $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ sont

linéairement indépendants :

$$\lambda_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \lambda_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 - 2\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ 2\lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ 3\lambda_1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \end{cases}$$

Ainsi, les vecteurs donnés forment bien une base de \mathbb{R}^3 .

Propriété 4.30

Soit V un espace vectoriel de dimension $n > 0$.

1. Si $m < n$, alors un ensemble formé de m vecteurs de V n'engendre pas V .
2. Si $m < n$, alors un ensemble formé de m vecteurs linéairement indépendants de V peut être complété pour former une base de V .

Exemple. Soit $V = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, l'espace vectoriel des matrices 2×2 à coefficients réels. On a $\dim V = 4$.

1. Considérons les trois matrices

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ces matrices ($m = 3 < 4$) sont linéairement indépendantes.

En effet, si

$$\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 + \lambda_3 A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

alors

$$\lambda_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \lambda_3 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\iff \begin{bmatrix} \lambda_1 + \lambda_2 & \lambda_2 + \lambda_3 \\ \lambda_3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \lambda_3 = 0, \lambda_2 = 0, \lambda_1 = 0.$$

Ces matrices sont donc linéairement indépendantes. Mais elles n'engendrent pas tout $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$: toute combinaison linéaire est de la forme

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & 0 \end{bmatrix},$$

et ne permet pas d'obtenir de matrices dont le coefficient $(2, 2)$ est non nul. Ainsi,

$$\text{Vect}(A_1, A_2, A_3) \neq \mathcal{M}_2(\mathbb{R}).$$

2. On peut compléter cet ensemble pour former une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ en ajoutant, par exemple,

$$A_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Alors

$$\mathcal{B} = \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right)$$

est une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Propriété 4.31

Soit V un espace vectoriel de dimension $n > 0$. Soit W un sous-espace vectoriel de V . Nous avons :

1. $\dim W \leq \dim V$.
2. Si $\dim W = \dim V$ alors $W = V$.

Démonstration. Soit (w_1, w_2, \dots, w_m) une base de W .

1. Comme par définition les vecteurs w_1, \dots, w_m sont linéairement indépendants, alors le Théorème 4.23 implique $m \leq \dim V$.
2. Si $m = \dim V$, alors par le Théorème 4.28, point 1, les m vecteurs w_1, \dots, w_m engendrent V et forment une base de V . Ainsi $W = V$.

□

Exemple. Soit $V = \mathbb{P}_3$, de dimension 4.

1. Considérons

$$W = \{p \in \mathbb{P}_3 \mid p(0) = 0\} = \{ax + bx^2 + cx^3 \mid a, b, c \in \mathbb{R}\}.$$

Alors $\{x, x^2, x^3\}$ engendre W et est linéairement indépendant, d'où

$$\dim W = 3 < 4 = \dim V.$$

2. **Sous-espace engendré par 4 polynômes indépendants.**

Posons

$$q_1(x) = 1, \quad q_2(x) = x + 1, \quad q_3(x) = x^2 + 2, \quad q_4(x) = x^3 + x,$$

et soit $W' = \text{Vect}(q_1, q_2, q_3, q_4) \subset V$.

Montrons que q_1, q_2, q_3, q_4 sont linéairement indépendants. Supposons

$$a q_1(x) + b q_2(x) + c q_3(x) + d q_4(x) = 0.$$

En identifiant les coefficients après développement :

$$(a + b + 2c) + (b + d)x + cx^2 + dx^3 = 0,$$

d'où le système

$$\begin{cases} d = 0, \\ c = 0, \\ b + d = 0, \\ a + b + 2c = 0, \end{cases} \implies a = b = c = d = 0.$$

Ainsi, $\{q_1, q_2, q_3, q_4\}$ est libre, c'est donc une base de $W' = \text{Vect}(q_1, q_2, q_3, q_4)$.

On a donc $W' \subset \mathbb{P}_3$ et $\dim W' = 4 = \dim \mathbb{P}_3$. Donc $W' = \mathbb{P}_3$.

Vecteur de coordonnées par rapport à une base

Théorème 4.32

Coordonnées des vecteurs

Soit V un espace vectoriel de dimension $n > 0$.

Soit $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$ une base de V . Alors tout vecteur v de V s'écrit de manière unique comme combinaison linéaire de b_1, \dots, b_n :

$$v = \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 + \dots + \lambda_n b_n, \quad \text{avec } \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}.$$

Démonstration. Soit $v = \lambda_1 b_1 + \dots + \lambda_n b_n$ et $v = \mu_1 b_1 + \dots + \mu_n b_n$ deux écritures de v . Nous avons

$$0_V = (\lambda_1 - \mu_1)b_1 + (\lambda_2 - \mu_2)b_2 + \dots + (\lambda_n - \mu_n)b_n.$$

Comme les vecteurs b_1, \dots, b_n sont linéairement indépendants, nous trouvons $\lambda_j - \mu_j = 0$ pour $j = 1, 2, \dots, n$, donc $\lambda_j = \mu_j$ pour $j = 1, 2, \dots, n$. \square

Remarque 4.4.0.33. *Un système générateur « couvre » l'espace ; l'indépendance linéaire « évite les redondances ». Une base « couvre sans redondances ».*

Définition 4.34

Coordonnées

Les nombres $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ sont appelés *coordonnées de v dans la base \mathcal{B}* .

Notation. Il suit du Théorème 4.32 que pour tout choix d'une base \mathcal{B} de V , nous pouvons

associer le vecteur $v \in V$ au vecteur $\begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$, appelé *vecteur des coordonnées de v dans la*

base \mathcal{B} , noté $[v]_{\mathcal{B}}$:

$$v = \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 + \dots + \lambda_n b_n \in V \quad \Leftrightarrow \quad [v]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

Attention! L'ordre des vecteurs de la base est important. Il détermine l'ordre des λ_i dans l'écriture de $[v]_{\mathcal{B}}$

Exemples. 1. Trouver les coordonnées de $\vec{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$ par rapport à :

(a) la base canonique $\mathcal{E} = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$:

$$\vec{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 4 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad [\vec{v}]_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

(b) la base $\mathcal{B} = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right)$:

Nous cherchons $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que

$$\vec{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \mu \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda + \mu \\ \lambda - \mu \end{bmatrix}.$$

Nous devons résoudre le système

$$\begin{cases} \lambda + \mu = 2 \\ \lambda - \mu = 4 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \lambda = 3 \\ \mu = -1 \end{cases}$$

Nous avons donc

$$\vec{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} = 3 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + (-1) \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad [\vec{v}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

2. Soit $V = \mathbb{P}_2$ et $\mathcal{E} = (1, x, x^2)$ la base canonique de $V = \mathbb{P}_2$. Nous avons :

$$p(x) = 2 - 3x + 7x^2 \in \mathbb{P}_2 \iff [p]_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 7 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

En prenant $B = (x^2, x, 1)$ nous trouvons :

$$p(x) = 2 - 3x + 7x^2 \in \mathbb{P}_2 \iff [p]_B = \begin{bmatrix} 7 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

Remarque 4.4.0.35. *L'ordre des vecteurs dans une base est bel et bien important.*

3. Soit $V = \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$ et \mathcal{E} la base canonique de $V = \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$. Nous avons :

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R}) \iff [A]_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^6$$

Remarque 4.4.0.36. *L'écriture d'un vecteur $v \in V$ sous la forme*

$$v = \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 + \dots + \lambda_n b_n$$

revient à exprimer v à l'aide des vecteurs de référence b_1, \dots, b_n de la base \mathcal{B} . Les nombres réels $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ jouent le rôle des coordonnées de v : ils indiquent « combien de fois » chaque vecteur de la base intervient dans la construction de v .

Il y a donc une correspondance entre l'espace vectoriel V et l'espace concret \mathbb{R}^n , à condition d'avoir choisi une base \mathcal{B} .

Ainsi, le vecteur v appartient à un espace vectoriel V quelconque (polynômes, matrices, fonctions...), mais son vecteur de coordonnées $[v]_{\mathcal{B}}$ appartient à \mathbb{R}^n , ce qui permet de travailler avec les outils du chapitre 1. Tout cela nous sera très utile à la section 4.6.2.

4.3 Noyau et image d'une matrice

Définition 4.37

Noyau d'une matrice

Soit $A = (a_{jk})$ une matrice de taille $m \times n$. L'ensemble des solutions de $A\vec{x} = \vec{0}$ est appelé le *noyau de la matrice A* , noté $\text{Ker}(A)$.

$$\text{Ker}(A) = \{ \vec{x} \in \mathbb{R}^n \mid A\vec{x} = \vec{0} \} \subset \mathbb{R}^n.$$

Remarques 4.4.0.38. 1. Soit $T_A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$,
 $\vec{x} \mapsto A\vec{x}$,

alors $\text{Ker}(T_A) = \{ \vec{x} \in \mathbb{R}^n \mid T_A(\vec{x}) = \vec{0} \}$, donc $\text{Ker}(A) = \text{Ker}(T_A)$.

2. L'ensemble des solutions du système d'équations linéaires homogènes

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

est le noyau de A .

Propriété 4.39

$\text{Ker}(A)$ forme un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^n .

Démonstration. 1. $\vec{0} \in \text{Ker}(A)$ car $A\vec{0} = \vec{0}$.

2. Soit $\vec{x}, \vec{y} \in \text{Ker}(A)$. On a $A(\vec{x} + \vec{y}) = A\vec{x} + A\vec{y} = \vec{0} + \vec{0} = \vec{0}$ donc $\vec{x} + \vec{y} \in \text{Ker}(A)$.

3. Soit $\vec{x} \in \text{Ker}(A)$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a $A(\lambda\vec{x}) = \lambda A\vec{x} = \lambda\vec{0} = \vec{0}$ donc $\lambda\vec{x} \in \text{Ker}(A)$.

□

Remarque importante 4.40

Si $\vec{b} \neq \vec{0}$, alors les solutions du système inhomogène

$$A\vec{x} = \vec{b}$$

ne forment pas de sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^n car $\vec{x} = \vec{0}$ n'est pas solution de l'équation.

Rappelons d'ailleurs qu'au chapitre 1, nous avons vu que l'ensemble des solutions de $A\vec{x} = \vec{b}$ est un translaté de l'ensemble des solutions de $A\vec{x} = \vec{0}$.

Théorème 4.41

La dimension du noyau de A correspond au nombre de variables libres dans la résolution de $A\vec{x} = \vec{0}$.

Démonstration. Lorsqu'on résout le système homogène $A\vec{x} = \vec{0}$, la forme échelonnée de A fait apparaître p variables libres (associées aux colonnes non pivot) et $n - p$ variables de base (associées aux colonnes pivot).

Chaque solution est entièrement déterminée par le choix arbitraire des p variables libres, les variables de base se déduisant alors automatiquement des équations.

Ainsi, l'ensemble des solutions est un sous-espace de \mathbb{R}^n décrit par p paramètres indépendants : c'est donc un sous-espace de dimension p .

Autrement dit :

$$\dim(\ker(A)) = \text{nombre de variables libres.}$$

□

Exemples. 1. Considérons la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}.$$

On résout le système homogène $A\vec{x} = \vec{0}$.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = R$$

On a un seul pivot, colonne 1, qui correspond à la variable de base. Les variables x_2 et x_3 sont libres.

Ainsi :

$$A\vec{x} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{x} = t \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + u \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, t, u \in \mathbb{R}, \text{ donc } \ker(A) = \text{Vect} \left(\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right).$$

Donc $\dim(\ker(A)) = 2$.

$$2. \text{ Soit } A = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 6 \\ -2 & -4 & 2 \\ 4 & 8 & -4 \end{bmatrix}.$$

$$A \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \text{ donc } x_1 \text{ et } x_2 \text{ sont variables de base, et } x_3 \text{ libre.}$$

$$A\vec{x} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{x} = t \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, t \in \mathbb{R}, \text{ donc } \ker(A) = \text{Vect} \left(\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$$

Donc $\dim(\ker(A)) = 1$.

Définition 4.42

Image d'une matrice

Soit $A = [\vec{a}_1 \cdots \vec{a}_n]$ une matrice de taille $m \times n$:

Le sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^m engendré par les n vecteurs colonne de la matrice A est appelé *image de A* , noté $\text{Im}(A)$:

$$\text{Im}(A) = \text{Vect}(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n) \subset \mathbb{R}^m.$$

Rappel. Pour $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ linéaire, $\text{Im}(T) = \{ \vec{b} \in \mathbb{R}^m \mid \exists \vec{x} \in \mathbb{R}^n, T(\vec{x}) = \vec{b} \}$.

Propriété 4.43

Soit $T_A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, alors $\text{Im}(A) = \text{Im}(T_A)$.

$$\vec{x} \mapsto A\vec{x}$$

Démonstration. 1. $\text{Im}(T_A) \subseteq \text{Im}(A)$: Soit $\vec{b} \in \text{Im}(T_A)$. Alors $\exists \vec{x} \in \mathbb{R}^n$ tel que $T_A(\vec{x}) = \vec{b}$.

Or $T_A(\vec{x}) = A\vec{x}$, donc $\exists \vec{x} \in \mathbb{R}^n$ tel que $A\vec{x} = \vec{b}$.

Donc $\exists \vec{x} \in \mathbb{R}^n$ tel que $\vec{b} = x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2 + \dots + x_n\vec{a}_n$.

Donc $\vec{b} \in \text{Vect}(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n)$, donc $\vec{b} \in \text{Im}(A)$.

2. $\text{Im}(A) \subseteq \text{Im}(T_A)$: Soit $\vec{b} \in \text{Im}(A)$. Alors $\vec{b} = \lambda_1\vec{a}_1 + \lambda_2\vec{a}_2 + \dots + \lambda_n\vec{a}_n$, $\lambda_i \in \mathbb{R}$.

Donc

$$\vec{b} = \begin{bmatrix} \vec{a}_1 & \vec{a}_2 & \dots & \vec{a}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{bmatrix}.$$

$$\text{Donc } \vec{b} = A \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{bmatrix}.$$

Ainsi il existe un vecteur de \mathbb{R}^n , $\begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{bmatrix}$, tel que $\vec{b} = A \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{bmatrix}$.

Donc $\vec{b} \in \text{Im}(T_A)$. □

Définition 4.44*Rang d'une matrice*

La dimension du sous-espace des colonnes de A est appelée *rang de la matrice* A , noté $\text{rang}(A)$:

$$\text{rang}(A) = \dim(\text{Im}(A)).$$

Exemple. Soit $A = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 6 \\ -2 & -4 & 2 \\ 4 & 8 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{a}_1 & \vec{a}_2 & \vec{a}_3 \end{bmatrix}$. $\text{Im}(A) = \text{Vect} \left(\begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -4 \\ -4 \\ 8 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \\ -4 \end{bmatrix} \right)$.

Mais $\begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -4 \\ -4 \\ 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \\ -4 \end{bmatrix}$, donc ces trois vecteurs ne sont pas linéairement indépendants.

Par contre, $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2\}$ est libre.

Donc $\text{Im}(A) = \text{Vect}(\vec{a}_1, \vec{a}_2)$ et $\dim(\text{Im}(A)) = 2 = \text{rang}(A)$.

Remarque importante 4.45

$A \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ donc (\vec{a}_1, \vec{a}_2) correspond aux colonnes pivot de A .

Théorème 4.46

$$\text{rang}(A) = \text{rang}(A^T)$$

Le rang d'une matrice est égal au rang de sa transposée.

$$\text{rang}(A) = \dim(\text{Im}(A)) = \dim(\text{Im}(A^T)) = \text{rang}(A^T).$$

Démonstration. Admis. □

Corollaire 4.47

Si A est de taille $m \times n$, alors $\text{rang}(A) \leq \min(m, n)$.

Démonstration. $\text{Im}(A) \subset \mathbb{R}^m$, donc $\text{rang}(A) \leq m$.

Et $\text{Im}(A^T) \subset \mathbb{R}^n$, donc $\text{rang}(A) = \text{rang}(A^T) \leq n$. □

Théorème 4.48

$$A \sim B \Rightarrow \text{rang}(A) = \text{rang}(B)$$

Deux matrices équivalentes ont le même rang :

$$A \sim B \Rightarrow \text{rang}(A) = \text{rang}(B)$$

Démonstration. Admis.

Idée : Cela repose sur la propriété que si E est inversible, alors $\text{rang}(EA) = \text{rang}(A)$ Or si $A \sim B$ alors il existe un ensemble de matrices élémentaires inversibles E_i telles que $A = E_k \cdots E_1 B$. □

Déterminer une base de $\text{Im}(A)$

Théorème 4.49

Soit A une matrice de taille $m \times n$ et R une forme échelonnée réduite de A . Alors

1. Les colonnes pivots de R sont linéairement indépendantes.
2. Les colonnes pivots de A (donc celles qui correspondent aux colonnes pivots de R) sont linéairement indépendantes.
3. Les colonnes non-pivots sont des combinaisons linéaires des autres colonnes.

Remarque 4.4.0.50. *Les opérations élémentaires sur les lignes préservent les relations d'indépendance ou de dépendance linéaire des colonnes.*

Démonstration. Soit R la forme échelonnée réduite par lignes de A .

1. Dans R , chaque colonne pivot contient un seul coefficient non nul, égal à 1, situé sur une ligne distincte, et tous les autres coefficients de cette colonne sont nuls. Il est donc immédiat que ces colonnes sont linéairement indépendantes (il suffit de l'écrire explicitement).
2. Comme R est obtenue à partir de A par des opérations élémentaires sur les lignes, il existe une matrice inversible E telle que $R = EA$. Les colonnes de R sont donc les images des colonnes de A par l'application linéaire représentée par E . Or une application linéaire inversible préserve les relations de dépendance linéaire :

$$E(c_1\vec{a}_{j_1} + \cdots + c_p\vec{a}_{j_p}) = 0 \iff c_1\vec{a}_{j_1} + \cdots + c_p\vec{a}_{j_p} = 0.$$

Les colonnes pivots de A sont donc linéairement indépendantes.

3. Enfin, dans la forme échelonnée réduite R , chaque colonne non-pivot s'exprime comme combinaison linéaire des colonnes pivots. En effet, $R = EA$ avec E inversible signifie que chaque colonne de R est obtenue en appliquant la même combinaison linéaire (définie par E) aux colonnes de A . Ainsi, toute relation entre colonnes dans R correspond à une relation identique entre les colonnes de A , et les colonnes non-pivots de A sont des combinaisons linéaires des colonnes pivots.

□

Méthode 4.51

Stratégie pour trouver une base de $\text{Im}(A)$

Stratégie pour trouver une base de $\text{Im}(A)$:

1. Échelonner et réduire A .
2. Les colonnes de A qui correspondent aux colonnes pivots de R forment une base de $\text{Im}(A)$.

Plus généralement, si A a k colonnes pivot, tout ensemble linéairement indépendant de k colonnes de A forme une base de $\text{Im}(A)$.

Cas particulier : Si A est de taille $m \times n$ et si R a un pivot sur chaque ligne (autrement dit, si R a m pivots), alors $\text{rang}(A) = \dim(\text{Im}(A)) = m$. Dans ce cas, $\text{Im}(A) = \mathbb{R}^m$ et tout ensemble libre de m vecteurs de \mathbb{R}^m constitue une base de $\text{Im}(A)$.

Remarque importante 4.52

Attention ! De manière générale, les colonnes pivot de R ne constituent pas une base de $\text{Im}(A)$: elles appartiennent à $\text{Im}(R)$, pas à $\text{Im}(A)$.

Exemple.

$$A = \begin{bmatrix} \vec{a}_1 & \vec{a}_2 & \vec{a}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \\ 1 & 4 & 5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{r}_1 & \vec{r}_2 & \vec{r}_3 \end{bmatrix} = R.$$

Ainsi, $\dim(\text{Im}(A)) = \text{rang}(A) = 2$ et nous pouvons prendre

$$(\vec{a}_1, \vec{a}_2) \quad \text{ou} \quad (\vec{a}_1, \vec{a}_3) \quad \text{ou} \quad (\vec{a}_2, \vec{a}_3)$$

comme base de $\text{Im}(A)$. Par contre, nous ne pouvons pas prendre ici (\vec{r}_1, \vec{r}_2) comme base de $\text{Im}(A)$ car la troisième composante des vecteurs \vec{r}_1 et \vec{r}_2 est nulle. Donc aucune colonne de A n'appartient à $\text{Vect}(\vec{r}_1, \vec{r}_2)$.

Nous remarquons néanmoins que les colonnes de A et R ont la même relation de dépendance linéaire :

$$\vec{r}_3 = -3\vec{r}_1 + 2\vec{r}_2 \quad \text{et} \quad \vec{a}_3 = -3\vec{a}_1 + 2\vec{a}_2.$$

Remarque 4.4.0.53. *En résumé :*

- Colonnes pivots de A : base de $\text{Im}(A)$.
- Nombre de variables libres : nombre de vecteurs dans la base de $\text{Ker}(A)$

On a donc le théorème suivant.

Théorème 4.54

Théorème du rang

Soit A une matrice de taille $m \times n$. Nous avons

$$\dim(\text{Ker}(A)) + \text{rang}(A) = n.$$

Démonstration. Nous avons

$$(\text{nombre de variables libres}) + (\text{nombre de pivots}) = (\text{nombre d'inconnues})$$

□

Remarque importante 4.55

Attention ! Le nombre de colonnes non pivot de A nous donne la dimension de $\text{Ker}(A)$, mais il est faux en général que les colonnes non pivot de A sont dans $\text{Ker}(A)$. Cela n'a en fait pas de sens, en général.

En effet, si A est de taille $m \times n$, alors les colonnes de A sont des vecteurs de \mathbb{R}^m , mais $\text{Ker}(A) \subset \mathbb{R}^n$.

Exemples. 1. $A = \begin{bmatrix} 2 & 6 & -1 & 1 & -7 \\ 1 & -2 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & 4 & 5 & 8 & -4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

x_1, x_3 sont des variables de base et x_2, x_4, x_5 sont des variables libres.

On a donc immédiatement $\text{Im}(A) = \text{Vect}(\vec{a}_1, \vec{a}_3)$ et $\dim \text{Ker}(A) = 3$.

Déterminons $\text{Ker}(A)$.

$$\text{Ker}(A) : \begin{cases} x_1 = 2x_2 + x_4 - 3x_5 \\ x_2 \text{ libre, } r \in \mathbb{R} \\ x_3 = -2x_4 + 2x_5 \\ x_4 \text{ libre, } s \in \mathbb{R} \\ x_5 \text{ libre, } t \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Donc

$$\vec{x} \in \text{Ker}(A) \Leftrightarrow \vec{x} = r \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, r, s, t \in \mathbb{R}.$$

Ces trois vecteurs engendrent $\text{Ker}(A)$ qui est de dimension 3, ils constituent donc une base de $\text{Ker}(A)$.

2. Déterminer le noyau et l'image de $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 5 \end{bmatrix}$.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = R$$

$$\text{rang}(A) = 2 \Rightarrow \begin{cases} \dim(\text{Ker}(A)) = 3 - 2 = 1 \\ \dim(\text{Im}(A)) = 2 \end{cases}$$

Système homogène associé à R :

$$\begin{cases} x + z = 0 \\ y + z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -z \\ y = -z \end{cases} \quad \begin{matrix} (2 \text{ variables de base}) \\ (1 \text{ variable libre}) \end{matrix}$$

Solution générale : $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$, avec $t \in \mathbb{R}$

Donc $\text{Ker}(A) = \text{Vect} \left(\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$.

Comme $\dim(\text{Im}(A)) = 2$, il faut choisir deux colonnes de A linéairement indépendantes pour avoir une base de $\text{Im}(A)$. Par exemple,

$$\text{Im}(A) = \text{Vect} \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix} \right), \quad \text{Im}(A) = \text{Vect} \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix} \right), \quad \text{Im}(A) = \text{Vect} \left(\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix} \right)$$

Remarques 4.4.0.56. (a) Nous pouvons remplacer $\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}$ par $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$ ci-dessus.

(b) Nous avons ici

$$\text{Im}(R) = \text{Vect} \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) \quad \text{et} \quad \text{Im}(A) \neq \text{Vect} \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right)$$

3. Déterminer le noyau et l'image de la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & -1 & -3 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & -3 & 2 & 7 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & -1 & -3 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & -3 & 2 & 7 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} = R$$

$$\text{rang}(A) = 3 \Rightarrow \begin{cases} \dim(\text{Ker}(A)) = 5 - 3 = 2 \\ \dim(\text{Im}(A)) = 3 \end{cases}$$

Comme $\dim(\text{Im}(A)) = 3$ et $\text{Im}(A) \subset \mathbb{R}^3$ on a $\text{Im}(A) = \mathbb{R}^3$.

Système homogène associé à R :

$$\begin{cases} x_1 - x_3 + x_5 = 0 \\ x_2 + x_3 - x_5 = 0 \\ x_4 + 2x_5 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = x_3 - x_5 \\ x_2 = -x_3 + x_5 \\ x_4 = -2x_5 \end{cases}$$

$$\text{Solution générale : } \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \text{ avec } s, t \in \mathbb{R}.$$

$$\text{Donc } \text{Ker}(A) = \text{Vect} \left(\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \right).$$

Corollaire 4.57

Si A est une matrice $n \times n$, alors les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. A est inversible.
2. $\text{rang}(A) = n$.
3. $\dim \text{Ker}(A) = 0$.

Démonstration. Il s'agit du théorème du rang 4.54 appliqué au théorème de caractérisation des matrices inversibles 2.23. \square

4.4 Rang et système d'équations linéaires

Considérons à nouveau le système d'équations linéaires à m équations et n inconnues :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 & (1) \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 & (2) \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \cdots + a_{3n}x_n = b_3 & (3) \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m & (m) \end{cases} \quad (\star)$$

Nous avons vu que nous pouvons exprimer ce système sous forme matricielle :

$$A\vec{x} = \vec{b}$$

où $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ et $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$.

De plus, nous avons défini la matrice augmentée associée au système (\star) :

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}$$

Les résultats obtenus au chapitre 1 peuvent se reformuler de la manière suivante :

Théorème 4.58

1. Si $\text{rang}(A) < \text{rang}([A \mid \vec{b}])$ alors le système n'a pas de solution.
2. Si $\text{rang}(A) = \text{rang}([A \mid \vec{b}]) = n$ alors le système possède une solution unique.
3. Si $\text{rang}(A) = \text{rang}([A \mid \vec{b}]) < n$ alors le système possède une infinité de solutions.

Démonstration. Nous avons vu que les opérations élémentaires sur les lignes ne changent ni le rang ni les solutions du système. Par conséquent, il suffit de considérer la matrice échelonnée-réduite associée au système :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & * & \cdots & * & * \\ 0 & 1 & 0 & * & \cdots & * & * \\ 0 & 0 & 1 & * & \cdots & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & * \end{bmatrix}$$

pour conclure. □

4.5 Espace des lignes d'une matrice

Définition 4.59

Vecteurs lignes, sous-espace des lignes, rang d'une matrice

Soit A une matrice de taille $m \times n$:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Les vecteurs

$$\vec{\ell}_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ \vdots \\ a_{1n} \end{bmatrix}, \quad \vec{\ell}_2 = \begin{bmatrix} a_{21} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{2n} \end{bmatrix}, \quad \dots, \quad \vec{\ell}_m = \begin{bmatrix} a_{m1} \\ a_{m2} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix}$$

sont les vecteurs colonnes de A^T . Nous dirons que ce sont les *vecteurs ligne* de la matrice A . Le sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^n engendré par les m vecteurs ligne de la matrice A est appelé *sous-espace des lignes* de A , noté $\text{Lgn}(A)$:

$$\text{Lgn}(A) = \text{Vect}(\vec{\ell}_1, \vec{\ell}_2, \dots, \vec{\ell}_m) \subset \mathbb{R}^n$$

Remarque 4.4.0.60. 1. $\text{Lgn}(A) = \text{Im}(A^T)$ et $\text{Lgn}(A^T) = \text{Im}(A)$.

2. Comme $\text{rang}(A) = \text{rang}(A^T)$, $\text{rang}(A) = \dim(\text{Lgn}(A))$.

Exemple. Soit $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$. Nous avons $\vec{\ell}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ et $\vec{\ell}_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}$.

Et, $\text{rang}(A) = 2$ car les vecteurs $\vec{\ell}_1$ et $\vec{\ell}_2$ sont linéairement indépendants.

Propriété 4.61

Si A et C sont deux matrices équivalentes alors

$$\text{Lgn}(A) = \text{Lgn}(C).$$

Démonstration. Comme $A \sim C$, les lignes de la matrice C peuvent être obtenues à partir de celles de la matrice A à l'aide des opérations élémentaires sur les lignes. Par conséquent, les lignes de C sont des combinaisons linéaires des lignes de A et de ce fait, elles se trouvent dans le sous-espace des lignes de A , ce qui implique

$$\text{Lgn}(C) \subset \text{Lgn}(A).$$

En inversant le rôle de A et C nous trouvons

$$\text{Lgn}(A) \subset \text{Lgn}(C),$$

ce qui nous donne l'égalité cherchée. \square

Remarque 4.4.0.62. Nous retrouvons le théorème 4.48 : si A et C sont deux matrices équivalentes alors

$$\text{rang}(A) = \text{rang}(C).$$

Remarque 4.4.0.63. Si R est une matrice échelonnée-réduite avec r lignes non-nulles :

$$R = \left[\begin{array}{cccccc} 1 & 0 & 0 & * & \cdots & * \\ 0 & 1 & 0 & * & \cdots & * \\ 0 & 0 & 1 & * & \cdots & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{array} \right] \left. \vphantom{\begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \\ \end{array}} \right\} r \text{ lignes non-nulles}$$

alors les r lignes non-nulles sont automatiquement linéairement indépendantes et de ce fait, forment une base du sous-espace des lignes de R . Il s'en suit que

$$\text{rang}(R) = r.$$

Remarque 4.4.0.64. Soit A une matrice de taille $m \times n$ et soit R la matrice échelonnée-réduite associée à la matrice A . Nous avons

$$\text{Lgn}(A) = \text{Lgn}(R)$$

et il est pratique d'utiliser l'ensemble formé des r lignes non-nulles de R comme base de $\text{Lgn}(A)$.

De plus, pour calculer le rang d'une matrice quelconque A , il suffit de compter le nombre de lignes non-nulles de R (ou le nombre de lignes non-nulles de toute matrice échelonnée associée à A).

Exemples. 1. Comme

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \\ 1 & 4 & 5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = R$$

nous trouvons

$$\text{rang}(A) = 2$$

et nous pouvons prendre $\left(\left[\begin{array}{c} 1 \\ 0 \\ -3 \end{array} \right], \left[\begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \end{array} \right] \right)$ comme base de $\text{Lgn}(A)$.

Tout vecteur de $\text{Lgn}(A)$ peut s'écrire sous la forme

$$\lambda \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix} + \mu \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda \\ \mu \\ 2\mu - 3\lambda \end{bmatrix}, \quad \text{avec } \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

De ce fait, nous avons un moyen simple de caractériser l'appartenance à $\text{Lgn}(A)$:

$$\vec{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} \in \text{Lgn}(A) \iff v_3 = 2v_2 - 3v_1$$

Bien entendu, comme $\dim(\text{Lgn}(A)) = 2$, pour avoir d'autres bases de $\text{Lgn}(A)$ il suffit de choisir deux lignes de A linéairement indépendantes :

$$\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} \right), \quad \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix} \right) \quad \text{ou} \quad \left(\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix} \right).$$

2. Soit $W = \text{Vect}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$ où $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}$, $\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix}$ et $\vec{v}_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Calculer $\dim W$ et donner une base de W .

Soit A la matrice dont les lignes sont les vecteurs $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$. Nous avons donc

$$W = \text{Lgn}(A) \quad \text{et} \quad \dim W = \text{rang}(A).$$

L'échelonnement et la réduction de la matrice A nous donne :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ -1 & 5 & 4 \\ 3 & -2 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = R$$

Comme $\text{rang}(A) = 2$ nous trouvons ainsi

$$\dim W = 2.$$

Comme il n'y a pas vecteurs ligne colinéaires, nous avons ces choix de base de W :

$$(\vec{v}_1, \vec{v}_2), \quad (\vec{v}_1, \vec{v}_3), \quad (\vec{v}_2, \vec{v}_3), \quad \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right).$$

Comme tout vecteur de $W = \text{Lgn}(A)$ peut s'écrire sous la forme

$$\lambda \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \mu \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda \\ \mu \\ \lambda + \mu \end{bmatrix}, \quad \text{avec } \lambda, \mu \in \mathbb{R},$$

nous avons un moyen simple de caractériser l'appartenance à W :

$$w = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix} \in W \iff w_3 = w_1 + w_2$$

Ainsi, nous vérifions immédiatement que

$$\begin{bmatrix} 2025 \\ 2026 \\ 4051 \end{bmatrix} \in W \quad (\text{car } 2025 + 2026 = 4051).$$

$$\begin{bmatrix} 123 \\ 456 \\ 789 \end{bmatrix} \notin W \quad (\text{car } 123 + 456 = 579 \neq 789).$$

Remarques 4.4.0.65. Le calcul est plus long en utilisant les bases (\vec{v}_1, \vec{v}_2) , (\vec{v}_1, \vec{v}_3) et (\vec{v}_2, \vec{v}_3) .

4.6 Applications linéaires

4.6.1 Définition et propriétés

Définition 4.66

Application linéaire entre espaces vectoriels

Soit V, W deux espaces vectoriels.

Soit $T : V \rightarrow W$ une transformation. On dit que T est une *application linéaire* (ou *transformation linéaire*) si

1. $T(u + v) = T(u) + T(v)$ pour tout $u, v \in V$.
2. $T(\lambda u) = \lambda T(u)$ pour tout $u \in V$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

Exemples. 1. $T : \mathbb{P}_3 \rightarrow \mathbb{P}_2$ est linéaire (dérivée)

$$p \mapsto p'$$

En effet, $T(p + q) = (p + q)' = p' + q' = T(p) + T(q)$

$$T(\lambda p) = (\lambda p)' = \lambda p' = \lambda T(p)$$

2. $T : \mathbb{P}_3 \rightarrow \mathbb{R}$ est linéaire.

$$p \mapsto \int_0^1 p(x) dx$$

En effet, $T(p + q) = \int_0^1 (p + q)(x) dx = \int_0^1 (p(x) + q(x)) dx$

$$= \int_0^1 p(x) dx + \int_0^1 q(x) dx = T(p) + T(q)$$

$$T(\lambda p) = \int_0^1 (\lambda p)(x) dx = \int_0^1 \lambda p(x) dx = \lambda \int_0^1 p(x) dx = \lambda T(p)$$

Propriété 4.67

$$T(0_V) = 0_W$$

Si $T : V \rightarrow W$ est une application linéaire alors $T(0_V) = 0_W$.

Démonstration. Nous avons : $T(0_V) = T(0u) = 0T(u) = 0_W$ □

Remarque 4.4.0.68. De manière équivalente : Si $T(0_V) \neq 0_W$ alors $T : V \rightarrow W$ n'est pas une application linéaire.

On a donc un critère simple pour décider si une transformation n'est pas une application linéaire.

Attention ! Si $T(0_V) = 0_W$, alors T n'est pas forcément linéaire.

Propriété 4.69

Principe de superposition

Soit $T : V \rightarrow W$ une application linéaire. Alors :

1. $T(\lambda u + \mu v) = \lambda T(u) + \mu T(v)$ pour tout $u, v \in V$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$
2. Principe de superposition :

$$T(\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \dots + \lambda_k u_k) = \lambda_1 T(u_1) + \lambda_2 T(u_2) + \dots + \lambda_k T(u_k)$$

pour tout $u_1, \dots, u_k \in V$ et $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$.

Démonstration. 1. $T(\lambda u + \mu v) = T(\lambda u) + T(\mu v) = \lambda T(u) + \mu T(v)$

2. Il suffit d'écrire $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \dots + \lambda_k u_k = \lambda_1 u_1 + (\lambda_2 u_2 + \dots + \lambda_k u_k)$ et utiliser la partie a. (plusieurs fois).

□

4.6.2 Matrice associée à une application linéaire $T : V \rightarrow W$

Rappel. Si $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ est une application linéaire, alors on peut lui associer la matrice

$$\begin{matrix} \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^m \\ \vec{x} & \longmapsto & A\vec{x} \end{matrix}$$

de taille $m \times n$ dont les colonnes sont les images des n vecteurs de la base canonique de \mathbb{R}^n :

$$A = \left[T(\vec{e}_1) \quad T(\vec{e}_2) \quad \dots \quad T(\vec{e}_n) \right]$$

appelée *matrice canoniquement associée à T* .

Nous allons voir maintenant comment associer une matrice à une application linéaire $T : V \rightarrow W$ où V, W sont des espaces vectoriels quelconques.

Soit V un espace vectoriel de dimension $n > 0$. Soit $\mathcal{B} = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ une base de V .

Nous avons vu que tout vecteur $v \in V$ s'écrit de manière unique :

$$v = \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 + \dots + \lambda_n b_n, \quad \text{avec } \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$$

et nous avons noté

$$[v]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

le vecteur de coordonnées de v dans la base \mathcal{B} .

Théorème 4.70

L'application $\varphi : V \longrightarrow \mathbb{R}^n$ est linéaire et bijective.

$$v \longmapsto [v]_{\mathcal{B}}$$

Cette application s'appelle *l'application coordonnées*.

Démonstration. — Pour montrer la linéarité, nous avons deux points à montrer.

1. $\varphi(u + v) = \varphi(u) + \varphi(v)$ pour tout $u, v \in V$.

Supposons que $u = \lambda_1 b_1 + \dots + \lambda_n b_n$ et $v = \mu_1 b_1 + \dots + \mu_n b_n$.

Alors $u + v = (\lambda_1 + \mu_1)b_1 + \dots + (\lambda_n + \mu_n)b_n$

$$\text{d'où } \varphi(u + v) = \begin{bmatrix} \lambda_1 + \mu_1 \\ \vdots \\ \lambda_n + \mu_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_n \end{bmatrix} = \varphi(u) + \varphi(v) \text{ pour tout } u, v \in V.$$

2. $\varphi(\lambda u) = \lambda \varphi(u)$ pour tout $u \in V$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

Comme $\lambda u = \lambda(\lambda_1 b_1 + \dots + \lambda_n b_n) = (\lambda \lambda_1)b_1 + \dots + (\lambda \lambda_n)b_n$

$$\text{on a : } \varphi(\lambda u) = \begin{bmatrix} \lambda \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda \lambda_n \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{bmatrix} = \lambda \varphi(u) \text{ pour tout } u \in V \text{ et } \lambda \in \mathbb{R}$$

— L'application est bijective car l'écriture $v = \lambda_1 b_1 + \dots + \lambda_n b_n$ est unique. □

Remarque importante 4.71

Ce théorème nous indique que dès lors qu'une base a été choisie, l'application coordonnée fournit sans ambiguïté (bijectivement) un dictionnaire qui traduit les éléments d'un espace vectoriel de dimension n quelconque, vers des vecteurs de \mathbb{R}^n .

Par conséquent, tout ce qui a été vu dans les chapitres précédents, où les seuls espaces vectoriels considérés étaient du type \mathbb{R}^n (ou \mathbb{R}^m , etc.) va pouvoir être traduit et adapté aux espaces vectoriels quelconques de dimension finie.

Notamment l'existence d'une matrice associée à une application linéaire !

Soit maintenant W un espace vectoriel de dimension $m > 0$. Soit $\mathcal{B}' = (w_1, w_2, \dots, w_m)$ une base de W .

De même que pour φ , l'application $\psi : W \longrightarrow \mathbb{R}^m$ est linéaire et bijective.

$$w \longmapsto [w]_{\mathcal{B}'}$$

Considérons maintenant une application linéaire $T : V \rightarrow W$

Nous avons

$$\begin{aligned} T(v) &= T(\lambda_1 b_1 + \dots + \lambda_n b_n) \\ &= T(\lambda_1 b_1) + \dots + T(\lambda_n b_n) \quad \text{par linéarité} \\ &= \lambda_1 T(b_1) + \dots + \lambda_n T(b_n) \quad \text{par linéarité} \end{aligned}$$

Cette expression nous dit qu'il suffit de connaître tous les $T(b_i)$ pour connaître $T(v)$, pour tout $v \in V$.

Nous avons le schéma suivant :

$$\begin{array}{ccc}
 v \in V & \xrightarrow{T} & W \ni T(v) \\
 \downarrow \varphi & & \downarrow \psi \\
 [v]_{\mathcal{B}} \in \mathbb{R}^n & \xrightarrow{\text{?}} & \mathbb{R}^m \ni [T(v)]_{\mathcal{B}'}
 \end{array}$$

La flèche en pointillés correspond à une application linéaire de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R}^m . Elle a donc une matrice qui lui est canoniquement associée, A . Autrement dit, A est la matrice de taille $m \times n$ telle que

$$[T(v)]_{\mathcal{B}'} = A[v]_{\mathcal{B}}$$

Nous avons vu que les colonnes de A sont les images des vecteurs de la base canonique de \mathbb{R}^n , par l'application linéaire de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R}^m qui lui est associée.

Comme par construction $b_i = 0 \cdot b_1 + \dots + 1 \cdot b_i + \dots + 0 \cdot b_n$ on a $[b_i]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \vec{e}_i$.

On peut donc restreindre le graphique précédent aux b_i :

$$\begin{array}{ccc}
 b_i & \xrightarrow{T} & T(b_i) \\
 \downarrow \varphi & & \downarrow \psi \\
 \vec{e}_i & \xrightarrow{\text{?}} & [T(b_i)]_{\mathcal{B}'}
 \end{array}$$

L'image de \vec{e}_i est donc $[T(b_i)]_{\mathcal{B}'}$ pour $i = 1, \dots, n$.

Nous avons donc motivé la définition suivante.

Définition 4.72

Matrice associée à une application linéaire

Soit $T : V \rightarrow W$ une application linéaire. Soit $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$ une base de V et $\mathcal{B}' = (w_1, \dots, w_m)$ une base de W .

La matrice de taille $m \times n$ dont la i -ème colonne est le vecteur de coordonnées dans la base \mathcal{B}' de l'image par T du i -ème vecteur de la base \mathcal{B} est appelée *matrice associée à l'application linéaire T par rapport aux bases \mathcal{B} de V et \mathcal{B}' de W* , notée $A_T^{\mathcal{B}'\mathcal{B}}$:

$$A_T^{\mathcal{B}'\mathcal{B}} = [[T(b_1)]_{\mathcal{B}'}, [T(b_2)]_{\mathcal{B}'}, \dots, [T(b_n)]_{\mathcal{B}'}]$$

Nous avons ainsi :

$$[T(v)]_{\mathcal{B}'} = A_T^{\mathcal{B}'\mathcal{B}}[v]_{\mathcal{B}} \quad \text{pour tout } v \in V.$$

Méthode 4.73

Méthode pour calculer $A_T^{\mathcal{B}'\mathcal{B}}$ Méthode pour calculer $A_T^{\mathcal{B}'\mathcal{B}}$.

1. Calculer les images des n vecteurs de la base $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$ de V :

$$T(b_1), \quad T(b_2), \quad \dots, \quad T(b_n)$$

2. Exprimer ces n vecteurs comme combinaisons linéaires des m vecteurs de la base $\mathcal{B}' = (w_1, w_2, \dots, w_m)$:

$$T(b_1) = a_{11}w_1 + a_{21}w_2 + \dots + a_{m1}w_m$$

$$\vdots$$

$$T(b_n) = a_{1n}w_1 + a_{2n}w_2 + \dots + a_{mn}w_m$$

La matrice $A_T^{\mathcal{B}'\mathcal{B}}$ a comme colonnes les vecteurs de coordonnées dans la base \mathcal{B}' des vecteurs $T(b_1), T(b_2), \dots, T(b_n)$:

$$A_T^{\mathcal{B}'\mathcal{B}} = [[T(b_1)]_{\mathcal{B}'} \quad \dots \quad [T(b_n)]_{\mathcal{B}'}] = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Remarques 4.4.0.74. 1. Si l'on prend les bases canoniques \mathcal{E} et \mathcal{E}' de V et W , on va noter A_T la matrice associée plutôt que $A_T^{\mathcal{E}'\mathcal{E}}$ (pour simplifier la notation).

2. Si les espaces vectoriels de départ et d'arrivée sont égaux : $V = W$, en général on va prendre la même base pour les deux espaces : $\mathcal{B} = \mathcal{B}'$ et on va noter $A_T^{\mathcal{B}}$ la matrice associée plutôt que $A_T^{\mathcal{B}\mathcal{B}}$ (pour simplifier la notation).

Exemples. 1. Déterminer la matrice associée à l'application linéaire

$$\begin{aligned} T : \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) &\longmapsto (x + y, x - z) \end{aligned}$$

par rapport aux bases $\mathcal{B} = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right)$ de \mathbb{R}^3 et $\mathcal{B}' = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right)$ de \mathbb{R}^2 . On a :

$$T \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 1+1 \\ 1-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} = 0 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$T \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 1+1 \\ 1-0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = 1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + 1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$T \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 1+0 \\ 1-0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + 0 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

donc

$$A_T^{\mathcal{B}'\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

2. Déterminer la matrice associée à l'application linéaire

$$\begin{aligned} T : \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) &\longmapsto (2x + 3y - 4z, 5x - 6y, 7x - 8z) \end{aligned}$$

par rapport aux bases $\mathcal{B} = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$ de \mathbb{R}^3 dans l'espace de départ et $\mathcal{E} =$

$\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$ de \mathbb{R}^3 dans l'espace d'arrivée. On a :

$$\begin{aligned} T \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right) &= \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + 5 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 7 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ T \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right) &= \begin{bmatrix} -1 \\ -6 \\ -8 \end{bmatrix} = (-1) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + (-6) \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + (-8) \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ T \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) &= \begin{bmatrix} -4 \\ 0 \\ -8 \end{bmatrix} = (-4) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + 0 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + (-8) \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

donc

$$A_T^{\mathcal{E}\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -4 \\ 5 & -6 & 0 \\ 7 & -8 & -8 \end{bmatrix}$$

3. Déterminer la matrice associée à l'application linéaire

$$\begin{aligned} T : \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) &\longmapsto (2x + 3y - 4z, 5x - 6y, 7x - 8z) \end{aligned}$$

par rapport à la base $\mathcal{B} = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$ de \mathbb{R}^3 (même base pour l'espace de départ et l'espace d'arrivée). On a :

$$\begin{aligned} T \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right) &= \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + 5 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ T \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right) &= \begin{bmatrix} -1 \\ -6 \\ -8 \end{bmatrix} = (-1) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + (-6) \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + (-2) \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ T \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) &= \begin{bmatrix} -4 \\ 0 \\ -8 \end{bmatrix} = (-4) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + 0 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + (-8) \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

donc

$$A_T^{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -4 \\ 5 & -6 & 0 \\ 2 & -2 & -8 \end{bmatrix}$$

4. Déterminer la matrice associée à l'application linéaire

$$\begin{aligned} T : \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) &\longmapsto (y - z, 3x + 2y - 3z, 2x + 2y - 3z) \end{aligned}$$

par rapport à la base $\mathcal{B} = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$ de \mathbb{R}^3 (même base pour l'espace de départ et l'espace d'arrivée). On a :

$$\begin{aligned} T \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right) &= \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} = 0 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + (-1) \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ T \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right) &= \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} = 0 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + (-1) \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + 0 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ T \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) &= \begin{bmatrix} -1 \\ -3 \\ -3 \end{bmatrix} = (-1) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + (-3) \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + 0 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

donc

$$A_T^{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & -3 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

5. Déterminer la matrice associée à l'application linéaire

$$\begin{aligned} T : \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) &\longmapsto (y - z, 3x + 2y - 3z, 2x + 2y - 3z) \end{aligned}$$

par rapport à la base $\mathcal{B} = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} \right)$ de \mathbb{R}^3 (même base pour l'espace de départ et l'espace d'arrivée). On a :

$$\begin{aligned} T \left(\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) &= \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = (-1) \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + 0 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + 0 \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} \\ T \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right) &= \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} = 0 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + (-1) \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + 0 \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} \\ T \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} \right) &= \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} = 0 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + 0 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + 1 \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

donc

$$A_T^{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Nous remarquons que pour ce choix particulier de base, la matrice $A_T^{\mathcal{B}}$ est une matrice diagonale.

6. Déterminer la matrice associée à l'application linéaire $T : \mathbb{P}_2 \longrightarrow \mathbb{P}_2$ (dérivée) par
- $$p \longmapsto p'$$

rapport à la base canonique $\mathcal{E} = (1, x, x^2)$ de \mathbb{P}_2 . On a :

$$\begin{aligned} T(1) &= 1' = 0 = 0 \cdot 1 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2 \\ T(x) &= x' = 1 = 1 \cdot 1 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2 \\ T(x^2) &= (x^2)' = 2x = 0 \cdot 1 + 2 \cdot x + 0 \cdot x^2 \end{aligned}$$

donc

$$A_T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[T(1)]_{\mathcal{E}} \quad [T(x)]_{\mathcal{E}} \quad [T(x^2)]_{\mathcal{E}}$$

Remarques 4.4.0.75. Si $p(x) = a + bx + cx^2$ est un polynôme quelconque, les règles de dérivation nous donnent tout de suite :

$$p'(x) = b + 2cx. \quad \text{Nous avons donc :}$$

$$T(a + bx + cx^2) = b + 2cx$$

La matrice A_T nous permet de retrouver le même résultat à l'aide d'une multiplication matricielle. En effet,

$$[p]_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \Rightarrow A_T [p]_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b \\ 2c \\ 0 \end{bmatrix} = [p']_{\mathcal{E}}$$

d'où :

$$[p']_{\mathcal{E}} = A_T [p]_{\mathcal{E}}$$

7. Déterminer la matrice associée à l'application linéaire $T : \mathbb{P}_2 \longrightarrow \mathbb{P}_2$ par rapport à la
- $$p \longmapsto p'$$

base $\mathcal{B} = (1, 1+x, 1+x+x^2)$ de \mathbb{P}_2 . On a :

$$\begin{aligned} T(1) &= 1' = 0 = 0 \cdot 1 + 0 \cdot (1+x) + 0 \cdot (1+x+x^2) \\ T(1+x) &= (1+x)' = 1 = 1 \cdot 1 + 0 \cdot (1+x) + 0 \cdot (1+x+x^2) \\ T(1+x+x^2) &= (1+x+x^2)' = 1+2x = (-1) \cdot 1 + 2 \cdot (1+x) + 0 \cdot (1+x+x^2) \end{aligned}$$

donc

$$A_T^{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

8. Soit $\mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices de taille 2×2 .

Déterminer la matrice de l'application linéaire $\text{Tr} : \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ (trace de la

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \longmapsto a + d$$

matrice),

par rapport aux bases canoniques de $\mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$ et \mathbb{R} . On a :

$$\text{Tr} \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right) = 1 + 0 = 1 = 1 \cdot 1$$

$$\text{Tr} \left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right) = 0 + 0 = 0 = 0 \cdot 1$$

$$\text{Tr} \left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right) = 0 + 0 = 0 = 0 \cdot 1$$

$$\text{Tr} \left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) = 0 + 1 = 1 = 1 \cdot 1$$

donc

$$A_{\text{Tr}} = [1 \ 0 \ 0 \ 1]$$

4.6.3 Noyau et image d'une application linéaire

Définition 4.76

Noyau et image

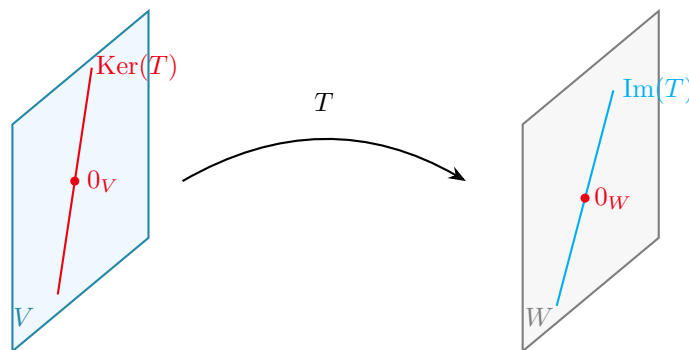
Soit V et W deux espaces vectoriels et soit $T : V \rightarrow W$ une application linéaire.

1. Le *noyau* de T , noté $\text{Ker}(T)$ est le sous-ensemble de V défini par

$$\text{Ker}(T) = \{v \in V \mid T(v) = 0_W\} \subset V$$

2. L'*image* de T , notée $\text{Im}(T)$ est le sous-ensemble de W défini par

$$\text{Im}(T) = \{w \in W \mid \text{il existe } v \in V \text{ tel que } T(v) = w\} \subset W$$



Théorème 4.77

Ker(T) sev de V

$\text{Ker}(T)$ est un sous-espace vectoriel de V .

Démonstration. 1. $0_V \in \text{Ker}(T)$ car $T(0_V) = 0_W$.

Soit $u, v \in \text{Ker}(T)$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

2. Soit u et v tel que $T(u) = 0_W$ et $T(v) = 0_W$.

Alors $T(u + v) = T(u) + T(v) = 0_W + 0_W = 0_W$. Donc on a bien $u + v \in \text{Ker}(T)$.

3. $T(\lambda u) = \lambda T(u) = \lambda 0_W = 0_W$. Donc $\lambda u \in \text{Ker}(T)$. □

Théorème 4.78

$\text{Im}(T)$ sev de W

$\text{Im}(T)$ est un sous-espace vectoriel de W .

Démonstration. 1. $0_W \in \text{Im}(T)$ car $0_V \in V$ vérifie $T(0_V) = 0_W$.

Soit $w_1, w_2 \in \text{Im}(T)$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

2. Par hypothèse, il existe $v_1, v_2 \in V$ tels que $w_1 = T(v_1)$ et $w_2 = T(v_2)$.

Donc $w_1 + w_2 = T(v_1) + T(v_2) = T(v_1 + v_2)$. Donc on a bien $w_1 + w_2 \in \text{Im}(T)$.

3. $\lambda w_1 = \lambda T(v_1) = T(\lambda v_1)$. Donc $\lambda w_1 \in \text{Im}(T)$. □

Remarques 4.4.0.79. 1. Nous avons $0_V \in \text{Ker}(T)$ et $0_W \in \text{Im}(T)$.

2. Pour caractériser $\text{Ker}(T)$ et $\text{Im}(T)$ complètement, il suffit de donner leur dimension et une base.

De plus, $\dim(\text{Ker}(T)) \leq \dim(V)$ et $\dim(\text{Im}(T)) \leq \dim(W)$

Exemples

Application nulle Soit $T : V \rightarrow W$ définie par $T(v) = 0_W$ pour tout $v \in V$.

On a $\text{Ker}(T) = V$ et $\text{Im}(T) = \{0_W\}$.

Application identité Soit $T : V \rightarrow V$ définie par $T(v) = v$ pour tout $v \in V$.

On a $\text{Ker}(T) = \{0_V\}$ et $\text{Im}(T) = V$.

Projection canonique Soit $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$.

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

On a $\text{Im}(T) = \mathbb{R}^2$

$$\text{et } \text{Ker}(T) = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid z \in \mathbb{R} \right\}$$

Donc $\text{Ker}(T) = \text{Vect} \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$. Remarquons que $\dim(\text{Ker}(T)) = 1$.

Soit $T : \mathbb{P}_2 \longrightarrow \mathbb{P}_2$ où $p(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2$ et $T(p(t)) = (a_0 + a_1) + a_1t + a_2t^2$.
 $p \longmapsto T(p)$

Par exemple : $T(1+t) = 2+t$ et $T(1-t-t^2) = (1-1) - t - t^2 = -t - t^2$.

1. $\text{Ker}(T)$:

On cherche les $p \in \mathbb{P}_2$ tels que $T(p) = 0$. Autrement dit, $(a_0 + a_1) + a_1t + a_2t^2 = 0$.

Donc

$$\begin{cases} a_0 + a_1 = 0 \\ a_1 = 0 \\ a_2 = 0 \end{cases}$$

Donc $a_0 = a_1 = a_2 = 0$ et $\text{Ker}(T) = \{0\}$.

2. $\text{Im}(T)$:

Soit $b \in \mathbb{P}_2$ un polynôme donné par $b(t) = b_0 + b_1t + b_2t^2$.

À résoudre $T(p) = b$.

$$\begin{aligned} (a_0 + a_1) + a_1t + a_2t^2 &= b_0 + b_1t + b_2t^2 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} a_0 + a_1 = b_0 \\ a_1 = b_1 \\ a_2 = b_2 \end{cases} \\ \Leftrightarrow a_0 = b_0 - b_1, a_1 = b_1, a_2 = b_2. \end{aligned}$$

En fonction de b_0, b_1, b_2 , on pourra toujours trouver a_0, a_1, a_2 et avoir $T(p) = b$.

Donc $\forall b \in \mathbb{P}_2, \exists p \in \mathbb{P}_2$ tel que $T(p) = b$, et $\text{Im}(T) = \mathbb{P}_2$.

Lien entre le noyau et l'image d'une application linéaire, et celui de ses matrices associées

Soit $\mathcal{B} = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ une base de V ($\dim V = n$), et soit $\mathcal{B}' = (w_1, w_2, \dots, w_m)$ une base de W ($\dim W = m$).

Soit $A = A_T^{\mathcal{B}'\mathcal{B}}$ la matrice de T par rapport aux bases \mathcal{B} de V et \mathcal{B}' de W .

Nous avons l'équivalence :

$$\left. \begin{array}{l} T(v) = w \\ \text{avec } v \in V \text{ et } w \in W \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} A[v]_{\mathcal{B}} = [w]_{\mathcal{B}'} \\ \text{avec } [v]_{\mathcal{B}} \in \mathbb{R}^n \text{ et } [w]_{\mathcal{B}'} \in \mathbb{R}^m \end{array} \right.$$

d'où la suite d'équivalences suivantes

$$\begin{aligned} v \in \text{Ker}(T) \subset V &\Leftrightarrow T(v) = 0_W \\ &\Leftrightarrow A[v]_{\mathcal{B}} = [0_W]_{\mathcal{B}'} \\ &\Leftrightarrow [v]_{\mathcal{B}} \in \text{Ker}(A) \subset \mathbb{R}^n \\ w \in \text{Im}(T) \subset W &\Leftrightarrow \exists v \in V, T(v) = w \\ &\Leftrightarrow \exists [v]_{\mathcal{B}} \in \mathbb{R}^n, A[v]_{\mathcal{B}} = [w]_{\mathcal{B}'} \\ &\Leftrightarrow [w]_{\mathcal{B}'} \in \text{Im}(A) \subset \mathbb{R}^m \end{aligned}$$

En résumé,

$$\begin{aligned} v \in \text{Ker}(T) \subset V &\Leftrightarrow [v]_{\mathcal{B}} \in \text{Ker}(A) \subset \mathbb{R}^n \\ w \in \text{Im}(T) \subset W &\Leftrightarrow [w]_{\mathcal{B}'} \in \text{Im}(A) \subset \mathbb{R}^m \end{aligned}$$

Donc,

$$\begin{aligned} \dim(\text{Ker}(T)) &= \dim(\text{Ker}(A)) \\ \dim(\text{Im}(T)) &= \dim(\text{Im}(A)) \end{aligned}$$

Définition 4.80

Rang

Soit $T : V \rightarrow W$ une application linéaire.
On définit le *rang* de T , noté $\text{rang}(T)$ par

$$\text{rang}(T) = \dim(\text{Im}(T))$$

Remarque 4.4.0.81. On peut montrer que

$$\text{rang}(T) = \text{rang}\left(A_T^{\mathcal{B}'\mathcal{B}}\right)$$

pour tout choix de base \mathcal{B} de V et \mathcal{B}' de W .

Théorème 4.82

Théorème du rang

Soit $T : V \rightarrow W$ une application linéaire. On a :

$$\begin{aligned} \dim V &= \dim(\text{Ker}(T)) + \dim(\text{Im}(T)) \\ &= \dim(\text{Ker}(T)) + \text{rang}(T) \end{aligned}$$

Démonstration. Soit \mathcal{B} une base de V et \mathcal{B}' une base de W .

Soit $A = A_T^{\mathcal{B}'\mathcal{B}}$ la matrice de T par rapport aux bases \mathcal{B} de V et \mathcal{B}' de W .

Soit $A\vec{x} = \vec{0}$ le système homogène associé.

Nous avons vu que :

$$(\text{nb. de variables libres}) = (\text{nb. d'inconnues}) - (\text{nb. de pivots})$$

$$\text{donc, } \dim(\text{Ker}(A)) = n - \dim(\text{Im}(A))$$

$$\text{donc, } \dim(\text{Ker}(T)) = \dim V - \dim(\text{Im}(T))$$

d'où le résultat. □

Exemples. 1. Déterminer le noyau et l'image de l'application linéaire $T : \mathbb{P}_2 \longrightarrow \mathbb{P}_2$ (dérivée).

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{P}_2 & \longrightarrow & \mathbb{P}_2 \\ p & \longmapsto & p' \end{array}$$

Par définition, $\text{Ker}(T) = \{p \in \mathbb{P}_2 \mid T(p) = 0\} = \{p \in \mathbb{P}_2 : p' = 0\}$. On s'attend à trouver $\text{Ker}(T) = \mathbb{P}_0$, d'après les outils d'analyse.

D'autre part, $\text{Im}(T) = \{q \in \mathbb{P}_2 \mid \text{il existe } p \in \mathbb{P}_2 \text{ tel que } p' = q\}$. On s'attend à trouver $\text{Im}(T) = \mathbb{P}_1$, d'après les outils d'analyse.

Rappel. La matrice de $T(p) = p'$ par rapport à la base canonique $\mathcal{E} = \{1, x, x^2\}$ de \mathbb{P}_2 est

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

$$\text{On a } \text{rang}(A) = 2 \Rightarrow \begin{cases} \dim(\text{Ker}(T)) = 3 - 2 = 1 \\ \dim(\text{Im}(T)) = 2 \end{cases}$$

Système homogène associé à A :

$$\begin{cases} x_2 = 0 \\ 2x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \text{ avec } t \in \mathbb{R}$$

$$\text{Donc, } \text{Ker}(A) = \text{Vect} \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right).$$

$$\text{Comme } \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = [1]_{\mathcal{E}}, \text{ nous trouvons}$$

$$\text{Ker}(T) = \text{Vect}(1) = \mathbb{P}_0.$$

$$\text{D'autre part, on a } \text{Im}(A) = \text{Vect} \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \right) = \text{Vect} \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right).$$

$$\text{Comme } \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = [1]_{\mathcal{E}} \text{ et } \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = [x]_{\mathcal{E}}, \text{ nous trouvons}$$

$$\text{Im}(T) = \text{Vect}(1, x) = \mathbb{P}_1$$

2. Déterminer le noyau et l'image de l'application linéaire trace $\text{Tr} : M_{2,2}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$
- $$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \mapsto a + d$$

Rappel. La matrice de Tr par rapport aux bases canoniques de $M_{2,2}(\mathbb{R})$ et \mathbb{R} est

$$A = [1 \ 0 \ 0 \ 1].$$

$$\text{On a } \text{rang}(A) = 1 \Rightarrow \begin{cases} \dim(\text{Ker}(\text{Tr})) = 4 - 1 = 3 \\ \dim(\text{Im}(\text{Tr})) = 1 \end{cases}$$

Système homogène associé à $A : x_1 + x_4 = 0 \Leftrightarrow x_1 = -x_4 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -u \\ x_2 = s \\ x_3 = t \\ x_4 = u \end{cases}$, avec $s, t, u \in \mathbb{R}$.

Solution générale : $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + u \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, avec $s, t, u \in \mathbb{R}$.

Ainsi, $\text{Ker}(A) = \text{Vect} \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$.

On a $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \left[\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right]_{\mathcal{E}}$, $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \left[\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right]_{\mathcal{E}}$ et $\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \left[\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right]_{\mathcal{E}}$.

De même on trouve $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \left[\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right]_{\mathcal{E}}$ et $\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \left[\left[\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right] \right]_{\mathcal{E}}$.

Par conséquent,

$$\text{Ker}(\text{Tr}) = \text{Vect} \left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right).$$

D'autre part, comme $\dim(\text{Im}(\text{Tr})) = 1$ et $\text{Im}(\text{Tr}) \subset \mathbb{R}$ on a $\text{Im}(\text{Tr}) = \mathbb{R}$.

4.6.4 Changement de base

Soit V un espace vectoriel de dimension $n > 0$. Soit $\mathcal{B} = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ et $\mathcal{C} = (c_1, c_2, \dots, c_n)$ deux bases de V .

Soit I_d l'application identité définie par : $I_d : V \longrightarrow V$
 $v \longmapsto v$

L'application identité envoie un vecteur de V sur ce même vecteur, mais dans l'espace de départ, le vecteur v est exprimé dans la base \mathcal{B} , alors que dans l'espace d'arrivée, il est exprimé dans la base \mathcal{C} . On a donc $I_d : [v]_{\mathcal{B}} \mapsto [v]_{\mathcal{C}}$.

Définition 4.83

Matrice de passage

Cette application linéaire a une matrice qui lui est canoniquement associée, $A_{\text{id}}^{\mathcal{C}\mathcal{B}}$. On notera plutôt cette matrice $\mathcal{P}^{\mathcal{C}\mathcal{B}}$ et on l'appelle *matrice de passage de la base \mathcal{B} vers la base \mathcal{C}* .

Remarque 4.4.0.84. Interprétation géométrique des matrices de passage

La matrice de passage $\mathcal{P}^{\mathcal{C}\mathcal{B}}$ peut être vue comme un « dictionnaire » qui traduit les coordonnées d'un vecteur exprimées dans la base \mathcal{B} vers ses coordonnées dans la base \mathcal{C} .

Géométriquement, dans \mathbb{R}^2 ou \mathbb{R}^3 , un changement de base correspond à :

— Une rotation du système de coordonnées (si les bases sont orthonormées)

— Une déformation incluant éventuellement des étirements ou contractions selon certaines directions

— Une combinaison des deux effets précédents

Le vecteur lui-même ne change pas dans l'espace, seule sa description (ses coordonnées) change selon le « point de vue » (la base) choisi.

Par construction,

$$\mathcal{P}^{\mathcal{C}\mathcal{B}} = A_{\text{id}}^{\mathcal{C}\mathcal{B}} = [[b_1]_{\mathcal{C}} \quad [b_2]_{\mathcal{C}} \quad \cdots \quad [b_n]_{\mathcal{C}}],$$

c'est à dire que pour construire la matrice de passage de la base \mathcal{B} vers la base \mathcal{C} , on peut exprimer chacun des vecteurs de la base \mathcal{B} dans la base \mathcal{C} .

De plus,

$$[v]_{\mathcal{C}} = \mathcal{P}^{\mathcal{C}\mathcal{B}}[v]_{\mathcal{B}}$$

Exemple. Soit $\mathcal{B} = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$ et $\mathcal{C} = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$ deux bases de \mathbb{R}^2 .

Nous avons :

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 1 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 1 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \mathcal{P}^{\mathcal{C}\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = (-1) \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + 1 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + (-1) \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \mathcal{P}^{\mathcal{B}\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Propriété 4.85

Si \mathcal{B} et \mathcal{C} sont deux bases de l'espace vectoriel V alors :

$$\mathcal{P}^{\mathcal{B}\mathcal{C}} = (\mathcal{P}^{\mathcal{C}\mathcal{B}})^{-1}$$

Nous pouvons donc obtenir $\mathcal{P}^{\mathcal{B}\mathcal{C}}$ à l'aide de l'algorithme :

$$[\mathcal{P}^{\mathcal{C}\mathcal{B}} \mid I_n] \sim [I_n \mid \mathcal{P}^{\mathcal{B}\mathcal{C}}]$$

Reprenons les bases de l'exemple précédent. On a :

$$[\mathcal{P}^{\mathcal{C}\mathcal{B}} \mid I_2] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} = [I_2 \mid \mathcal{P}^{\mathcal{B}\mathcal{C}}]$$

Remarque 4.4.0.86. Lorsque $V = \mathbb{R}^n$, les bases $\mathcal{B} = (\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n)$ et $\mathcal{C} = (\vec{c}_1, \dots, \vec{c}_n)$ peuvent être représentées sous forme de matrices dans la base canonique :

$$B = \begin{bmatrix} \vec{b}_1 & \vec{b}_2 & \cdots & \vec{b}_n \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad C = \begin{bmatrix} \vec{c}_1 & \vec{c}_2 & \cdots & \vec{c}_n \end{bmatrix}.$$

Par définition de la matrice de passage $\mathcal{P}^{\mathcal{C}\mathcal{B}}$, les colonnes de $\mathcal{P}^{\mathcal{C}\mathcal{B}}$ sont les coordonnées des vecteurs de la base \mathcal{B} exprimés dans la base \mathcal{C} :

$$\vec{b}_i = \beta_{1i}\vec{c}_1 + \cdots + \beta_{ni}\vec{c}_n \iff [\vec{b}_i]_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} \beta_{1i} \\ \vdots \\ \beta_{ni} \end{bmatrix}.$$

Sous forme matricielle, cela s'écrit :

$$B = C \mathcal{P}^{\mathcal{C}\mathcal{B}}.$$

Pour déterminer $\mathcal{P}^{\mathcal{C}\mathcal{B}}$, il suffit donc de résoudre cette équation où l'inconnue est $\mathcal{P}^{\mathcal{C}\mathcal{B}}$. Autrement dit, on échelonne la matrice augmentée

$$[\vec{c}_1 \ \vec{c}_2 \ \cdots \ \vec{c}_n \mid \vec{b}_1 \ \vec{b}_2 \ \cdots \ \vec{b}_n] \sim [I_n \mid \mathcal{P}^{\mathcal{C}\mathcal{B}}].$$

Enfin, si la base d'arrivée est la base canonique $\mathcal{E} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\}$, alors pour tout i , $[\vec{b}_i]_{\mathcal{E}} = \vec{b}_i$, d'où immédiatement :

$$\mathcal{P}^{\mathcal{E}\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} \vec{b}_1 & \vec{b}_2 & \cdots & \vec{b}_n \end{bmatrix}.$$

Exemple. Considérons les deux bases de \mathbb{R}^3 :

- Base $\mathcal{B} = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$
- Base $\mathcal{C} = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$ (base canonique)

Étape 1 : Construction de la matrice de passage $\mathcal{P}^{\mathcal{C}\mathcal{B}}$

Puisque \mathcal{C} est la base canonique, les coordonnées d'un vecteur dans \mathcal{C} sont simplement ses composantes. Donc :

$$\mathcal{P}^{\mathcal{C}\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

où les colonnes sont directement les vecteurs de \mathcal{B} .

Étape 2 : Calcul de la matrice inverse $\mathcal{P}^{\mathcal{B}\mathcal{C}}$

Utilisons l'algorithme de Gauss-Jordan :

$$\begin{aligned}
 [\mathcal{P}^{\mathcal{C}\mathcal{B}} \mid I_3] &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 &\underset{\sim}{\sim} \begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ \sim \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 &\underset{\sim}{\sim} \begin{matrix} L_2 \leftarrow -L_2 \\ \sim \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 &\underset{\sim}{\sim} \begin{matrix} L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \\ \sim \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \\
 &\underset{\sim}{\sim} \begin{matrix} L_3 \leftarrow \frac{1}{2}L_3 \\ \sim \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \\
 &\underset{\sim}{\sim} \begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 + L_3 \\ \sim \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \\
 &\underset{\sim}{\sim} \begin{matrix} L_1 \leftarrow L_1 - L_2 \\ \sim \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

$$\text{Donc } \mathcal{P}^{\mathcal{B}\mathcal{C}} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Étape 3 : Application du changement de base

Soit le vecteur $\vec{v} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ exprimé dans la base canonique \mathcal{C} .

Ses coordonnées dans la base \mathcal{B} sont :

$$\begin{aligned}
 [\vec{v}]_{\mathcal{B}} &= \mathcal{P}^{\mathcal{B}\mathcal{C}} [\vec{v}]_{\mathcal{C}} \\
 &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \\
 &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 3 + 2 - 1 \\ 3 - 2 + 1 \\ -3 + 2 + 1 \end{bmatrix} \\
 &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

$$\text{Vérification : } 2 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 1 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + 0 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Propriété 4.87

Si \mathcal{B} , \mathcal{C} et \mathcal{D} sont trois bases de l'espace vectoriel V alors la matrice de passage de la base \mathcal{B} vers la base \mathcal{D} peut se calculer comme suit :

$$\mathcal{P}^{\mathcal{D}\mathcal{B}} = \mathcal{P}^{\mathcal{D}\mathcal{C}} \mathcal{P}^{\mathcal{C}\mathcal{B}} \quad (\text{multiplication matricielle})$$

ou $\mathcal{P}^{\mathcal{D}\mathcal{B}} = (\mathcal{P}^{\mathcal{C}\mathcal{D}})^{-1} \mathcal{P}^{\mathcal{C}\mathcal{B}}$, ou $\mathcal{P}^{\mathcal{D}\mathcal{B}} = \mathcal{P}^{\mathcal{D}\mathcal{C}} (\mathcal{P}^{\mathcal{B}\mathcal{C}})^{-1}$

Les formules précédentes nous donnent une manière alternative pour calculer $\mathcal{P}^{\mathcal{C}\mathcal{B}}$: $\mathcal{P}^{\mathcal{C}\mathcal{B}} = (\mathcal{P}^{\mathcal{E}\mathcal{C}})^{-1} \mathcal{P}^{\mathcal{E}\mathcal{B}}$, où comme avant \mathcal{E} est la base canonique de V .

Exemple. Soit $V = \mathbb{R}^2$. On définit trois bases :

$$\mathcal{E} = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right), \quad \mathcal{B} = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right), \quad \mathcal{D} = \left(\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right).$$

1. Matrice de passage de \mathcal{E} vers \mathcal{B}

$$\mathcal{P}^{\mathcal{E}\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix},$$

2. Matrice de passage de \mathcal{D} vers \mathcal{E}

$$\mathcal{P}^{\mathcal{E}\mathcal{D}} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{P}^{\mathcal{D}\mathcal{E}} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

3. Donc

$$\mathcal{P}^{\mathcal{D}\mathcal{B}} = \mathcal{P}^{\mathcal{D}\mathcal{E}} \mathcal{P}^{\mathcal{E}\mathcal{B}} = (\mathcal{P}^{\mathcal{E}\mathcal{D}})^{-1} \mathcal{P}^{\mathcal{E}\mathcal{B}}.$$

On a :

$$\mathcal{P}^{\mathcal{D}\mathcal{B}} = \mathcal{P}^{\mathcal{D}\mathcal{E}} \mathcal{P}^{\mathcal{E}\mathcal{B}} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}.$$

Matrices d'application linéaire exprimées dans différentes bases**Propriété 4.88**

Soit $T : V \rightarrow V$ une application linéaire, $\mathcal{B} = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ et $\mathcal{C} = (c_1, c_2, \dots, c_n)$ deux bases de V . Alors :

$$A_T^{\mathcal{C}} = \mathcal{P}^{\mathcal{C}\mathcal{B}} A_T^{\mathcal{B}} \mathcal{P}^{\mathcal{B}\mathcal{C}}$$

Formulations équivalentes :

$$A_T^{\mathcal{C}} = \mathcal{P}^{\mathcal{C}\mathcal{B}} A_T^{\mathcal{B}} (\mathcal{P}^{\mathcal{C}\mathcal{B}})^{-1}$$

$$A_T^{\mathcal{C}} = (\mathcal{P}^{\mathcal{B}\mathcal{C}})^{-1} A_T^{\mathcal{B}} \mathcal{P}^{\mathcal{B}\mathcal{C}}$$

Démonstration. Nous avons le schéma suivant :

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbb{R}^n \ni [v]_{\mathcal{B}} & \xrightarrow{A_T^{\mathcal{B}}} & A_T^{\mathcal{B}}[v]_{\mathcal{B}} \in \mathbb{R}^n \\
 \mathcal{P}^{\mathcal{B}\mathcal{C}} \uparrow & & \downarrow \mathcal{P}^{\mathcal{C}\mathcal{B}} \\
 \mathbb{R}^n \ni [v]_{\mathcal{C}} & \xrightarrow{A_T^{\mathcal{C}}} & A_T^{\mathcal{C}}[v]_{\mathcal{C}} \in \mathbb{R}^n
 \end{array}$$

□

Remarque 4.4.0.89. Cette proposition nous donne une manière alternative de calculer

$$A_T^{\mathcal{C}} = [[T(c_1)]_{\mathcal{C}} \ [T(c_2)]_{\mathcal{C}} \ \cdots \ [T(c_n)]_{\mathcal{C}}]$$

lorsque $A_T^{\mathcal{B}} = [[T(b_1)]_{\mathcal{B}} \ [T(b_2)]_{\mathcal{B}} \ \cdots \ [T(b_n)]_{\mathcal{B}}]$ et $\mathcal{P}^{\mathcal{C}\mathcal{B}}$ (ou $\mathcal{P}^{\mathcal{B}\mathcal{C}}$) sont connues.

Définition 4.90

Matrices semblables

Soit A et A' deux matrices carrées de taille $n \times n$.

On dit que les matrices A et A' sont *semblables* s'il existe une matrice inversible P telle que

$$A' = PAP^{-1}$$

Les matrices $A_T^{\mathcal{C}}$ et $A_T^{\mathcal{B}}$ sont semblables car on a

$$A_T^{\mathcal{C}} = \mathcal{P}A_T^{\mathcal{B}}\mathcal{P}^{-1} \quad \text{avec } \mathcal{P} = \mathcal{P}^{\mathcal{C}\mathcal{B}}$$

Exemple. Soit $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ de matrice $A_T^{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ et $\mathcal{B} = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right)$.

— Matrices de passage :

$$\mathcal{P}^{\mathcal{E}\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad (\mathcal{P}^{\mathcal{E}\mathcal{B}})^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

— Changement de base :

$$A_T^{\mathcal{B}} = (\mathcal{P}^{\mathcal{E}\mathcal{B}})^{-1}A_T^{\mathcal{E}}\mathcal{P}^{\mathcal{E}\mathcal{B}} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Remarque importante 4.91**Importance pratique des changements de base**

Les changements de base sont fondamentaux en algèbre linéaire pour plusieurs raisons :

1. **Simplification des calculs** : Certains problèmes deviennent beaucoup plus simples dans une base bien choisie.
2. **Résolution de systèmes différentiels** : En physique et en ingénierie, le choix d'une base adaptée peut transformer un système d'équations différentielles couplées en équations indépendantes.
3. **Préparation à la diagonalisation** : Comme nous le verrons au chapitre suivant, trouver une base dans laquelle une matrice devient diagonale simplifie considérablement les calculs de puissances de matrices et l'étude des applications linéaires.
4. **Analyse de données** : En statistiques et apprentissage automatique, les changements de base (comme l'analyse en composantes principales) permettent d'identifier les directions de variance maximale dans les données.

Le concept de matrices semblables, introduit ci-dessus, capture précisément l'idée que deux matrices peuvent représenter la même application linéaire vue dans des bases différentes. Cette notion sera centrale pour la diagonalisation des matrices.